Buch-, Kunst-
und
...artenhandlung
von
...inrich Hoff
...nheim am Paradeplatz.

fl. 30.

Beck.

Math. P.
522 ga

Schweins

Buch-, Kunst-
und

Grössenlehre,

systematisch bearbeitet

von

Dr. Ferd. Schweins,

Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik
auf der Universität zu Heidelberg.

Leipzig,
bei Leopold Voß.
1833.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS
Bayerische Staatsbibliothek München

Vorrede.

Die Größenlehre beherrscht durch ihre Allgemeinheit alle Zweige der Mathematik — sie ist die allgemeine Mathematik. Die mannigfaltigen Ideen, welche sie bearbeitet, in Verbindung darzustellen, war mein Bemühen seit 25 Jahren in Schriften und akademischen Vorträgen.

Vorliegende Grundzüge und der allgemeine Ueberblick über die ganze Wissenschaft sind nicht allein für meine Zuhörer, und für solche, welche durch das Studium der Elemente mit dem Geiste dieser Wissenschaft sich bekannt machen wollen, sondern auch für jene bestimmt, welche meine Analysis vom Jahr 1820 und meine Theorie der Diffe-

renzen und Differentiale vom Jahr 1825 sich aneignen wollen; denn ich habe hier sowohl an den bekannten als an den unbekannten Inhalt Ideen geknüpft, die mich schon bei der Ausarbeitung jener Werke leiteten.

Schweins.

Einleitung und systematische Uebersicht der Grösenlehre.

Das Wiederholen derselben Größe und das Nebeneinanderseyn verschiedener Größen ist der Grundgedanke der Größenlehre. Das, was wiederholt wird, ist Eins; — durch das Wiederholen derselben entsteht die Vielheit. Die Wissenschaft, welche der entwickelte Grundgedanke ist, beschäftigt sich zuerst mit der Vielheit gleicher und dann mit dem Nebeneinanderseyn oder mit der Aufeinanderfolge ungleicher Größen.

Die erste Abhandlung über die Vielheit gleicher Grösen.

Das Zählen ist das Grundgeschäft; die verschiedenen Acte sind das einfache Zählen, das Aufheben desselben, das Zählen der Zahl, und das Aufheben desselben, oder mit anderen Benennungen, Zuzählen, Abzählen, Vervielfachen

und Messen. Diese Acte werden zuerst einzeln vorgenommen und dann in Verbindung, nämlich

Abzählen und Zuzählen,
Vervielfachen und Zuzählen,
Vervielfachen und Abzählen,
Messen und Zuzählen,
Messen und Abzählen,
Messen und Vervielfachen,
Mehrmaliges Messen.

Zwei besondere Fälle des Messens fesseln die Aufmerksamkeit, nämlich das Messen mit 10, 100, 1000, ..., und die gleiche Meßbarkeit.

Bei allen diesen Geschäften zeige ich, wie sie ausgeführt werden, ob sie in einer anderen Ordnung vorgenommen, oder ob sie durch andere Geschäfte ersetzt werden können. Das Ziel, zu welchem ich gelange, ist 1) vollkommene Freiheit in der Aufeinanderfolge der Geschäfte, 2) Vorschriften, welche zu befolgen, sowohl wenn man von dieser Freiheit Gebrauch machen, als auch wenn man die Hindernisse wegräumen will, durch welche jene Freiheit beschränkt werden soll, und 3) Vorschriften für die Fälle, in welchen bestimmte Geschäfte durch andere Geschäfte ersetzt werden können.

Ich trenne jetzt den Inhalt von der Gestalt, und erhalte die Gleichung und die Function, denn Gleichung ist vor-

handen, wenn verschiedene Geschäfte dieselbe Zahl, und Function, wenn dieselben Geschäfte verschiedene Zahlen erzeugen. Bei jener macht das Festhalten des Gehalts es möglich, durch Aufheben der Geschäfte, welche den Knoten bilden, diejenige Zahl wieder hervorzuziehen, mit welchen die verschiedenen Geschäfte vorgenommen sind. Dieses ist der Sinn desjenigen, was man Auflösen der Gleichungen vom ersten Grade nennt.

Zweite Abhandlung über das Nebeneinanderseyn verschiedener Grösen.

Das zweite Element, das in dem Grundgedanken liegt, und oben nicht beachtet wurde, weil von beiden nicht zugleich geredet werden konnte, tritt jetzt hervor. Zuerst werden alle Gestalten gebildet, welche durch das Nebeneinanderseyn mehrerer verschiedener Größen möglich sind, oder die Variationen.

An diesen bemerkt man vor allen drei unterscheidende Merkmale, nämlich

1) die verschiedene Stellung derselben Elemente in mehreren Verbindungen — Versetzungen,
2) die Folge der späteren Elemente auf die früheren, und nie umgekehrt — die geordneten Verbindungen oder Combinationen,

3) und derselbe Werth mehrerer Verbindungen — Verbindungen zur bestimmten Summe.

Das Wiederholen eines oder mehrerer Elemente kann bei allen diesen dreien Arten von Verbindungen gestattet seyn oder nicht.

Bei der ersteren Art der Verbindungen, nämlich bei den Versetzungen, bemerke ich, daß die Elemente an einem Orte sich befinden, oder an mehreren Orten zerstreuet seyn können; ich nenne die Verbindungen im ersten Falle einfache Versetzungen, und im anderen Falle vielfache Versetzungen oder auch Zerstreuungen, welche nirgends und hier zuerst untersucht werden. Unter diesen Zerstreuungen unterscheide ich jene ohne Beschränkung von den Zerstreuungen mit Beschränkung. Ich zeige, wie beide auf die einfachen Versetzungen zurückgeführt werden können, und finde hierdurch mit Leichtigkeit die Anzahl der Zerstreuungen.

Bei der zweiten Art der Verbindungen bemerke ich, daß die Anzahl der geordneten Verbindungen sowohl ohne als mit Wiederholungen ohne Summirung der Reihen bisher nicht gefunden worden. Ich führe sie auf die Zerstreuungen zurück, und erreiche dadurch ohne Schwierigkeit diesen Zweck.

Bei der dritten Art der Verbindungen, oder bei den Verbindungen zur bestimmten Summe verfahre ich auf gleiche Weise; ich führe sie auf die Zerstreuungen und auch

auf die geordneten Verbindungen zurück, (wie ich schon in meiner Theorie der Differenzen und Differentiale gethan habe) und finde durch jedes Verfahren mit Leichtigkeit die Anzahl der Verbindungen.

Nachdem ich die beiden Elemente, Vielheit gleicher und Nebeneinanderseyn ungleicher Elemente im Allgemeinen untersucht habe, nehme ich die einzelnen Acte des Zählens wieder vor, und zwar in ihrer Vielheit; ich wiederhole nämlich ein und dasselbe Geschäft, und zähle die Geschäfte; die Wissenschaft wird zur Zahl, das höchste, wozu sie sich erheben kann. 1) Zuerst wird das Zuzählen wiederholt, 2) dann folgt das Wiederholen des Vervielfachens, 3) hierauf wird das Abzählen und Messen, mit einander verbunden, wiederholt, und 4) zuletzt werden die Formen selbst wiederholt.

Dritte Abhandlung, das Zuzählen wird wiederholt.

Mit dem einfachsten Falle wird der Anfang gemacht, indem die Einheiten

$$1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ \ldots$$

zugezählt werden; es entsteht die Reihe

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ \ldots$$

Werden die Glieder dieser Reihe zugezählt, so entsteht die Reihe

1 , 3 , 6 , 10 , 15 , ...

durch Zuzählen der Glieder dieser Reihe entsteht die Reihe

1 , 4 , 10 , 20 , 35 , ...

wird das Zuzählen wiederholt, die Reihe

1 , 5 , 15 , 35 , 70 , ...

u. s. w.

Wenn das Zuzählen der n ersten Glieder einer Reihe durch

$$\Sigma_n$$

vorgestellt wird, so kann dieses wiederholende Zuzählen und das Resultat, zu welchem das Zuzählen führt, vorgestellt werden, bei der ersten Reihe durch

$$\Sigma_n 1 = \frac{n}{1}$$

bei der zweiten durch

$$\Sigma_n \Sigma_n 1 = \Sigma_n^2 1 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

bei der dritten durch

$$\Sigma_n \Sigma_n \Sigma_n 1 = \Sigma_n^3 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

bei der vierten durch

$$\Sigma_n \Sigma_n \Sigma_n \Sigma_n 1 = \Sigma_n^4 1 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w.

Dem Zuzählen habe ich ein Vervielfachen vorhergehen lassen, und dieses Vervielfachen später wieder aufgehoben, und dadurch mit Leichtigkeit die Summe erhalten.

Das besonders Merkwürdige dieser Reihen ist, daß die Summe der vorhergehenden Reihe zugleich das allgemeine Glied oder die Gestalt der Glieder der folgenden Reihe ist.

Die Summen der zusammengesetzteren Reihen ergeben sich nun von selbst; haben nämlich die Glieder der Reihen die Gestalt

$$b + (n - 1)\,a$$

oder

$$c + \frac{n-1}{1} \,.\, b + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2} \,.\, a$$

oder

$$d + \frac{n-1}{1} \,.\, c + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2} \,.\, b + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, a$$

u. s. w.; so ist die Summe der ersten Reihe

$$\frac{n}{1} \,.\, b + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, a$$

der zweiten

$$\frac{n}{1} \,.\, c + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, a$$

der dritten

$$\frac{n}{1}\, d + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, c + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, b + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, a$$

u. s. w.

Durch Zuzählen sind aus den früheren die späteren Reihen entstanden, durch das Aufheben des Zuzählens oder durch das Abzählen kann man von den späteren zu den früheren Reihen wieder zurückgehen. In meiner Theorie der Differenzen und Differentiale habe ich dieses Verfahren in seiner größten Allgemeinheit gelehrt.

Die vierte Abhandlung über das wiederholende Vervielfachen.

Das wiederholende Vervielfachen erzeugt die wichtigsten Reihen, zuerst die Potenzenreihe

$$a \;,\; aa \;,\; aaa \;,\; aaaa \;,\; \ldots.$$

auf ihr folgen die einfachen Facultäten

$$a, a(a+b), a(a+b)(a+2b), a(a+b)(a+2b)(a+3b), \ldots.$$

dann die Exponentialfacultäten

$$(1+ua^1), (1+ua^1)(1+ua^2), (1+ua^1)(1+ua^2)(1+ua^3), \ldots.$$

und zuletzt die allgemeinen Facultäten

$$f(1) \;,\; f(1).f(2) \;,\; f(1).f(2).f(3) \;,\; \ldots\ldots$$

Von der Potenzenreihe, jener merkwürdigen Reihe, welche unendlich vielen Stoff zur Untersuchung darbietet, habe ich nur in sofern hier gehandelt, als der Zweck dieser Schrift es

gestattete. Im Verzeichnisse findet man die einzelnen Gegenstände aufgeführt.

Den weitern Verfolg über Binomium, Polynomium, Exponentialgrößen, Bernoullische Zahlen, die Theile des Binomiums, als selbstständige Functionen betrachtet, und gewöhnlich Kreisfunctionen genannt, findet man in den vier ersten Abhandlungen meiner Analysis.

Die einfachen und die Exponentialfacultäten findet man ausführlich in der fünften und achten Abhandlung desselben Werks.

Wegen der allgemeinen Facultäten verweise ich auf die ausführliche Darstellung derselben in meiner Theorie der Differenzen und Differentiale, Seite 611.

Aus diesem, wozu noch die Untersuchung über höhere Gleichungen gerechnet werden muß, kann man den Stoff, der noch nicht erschöpft ist, bemessen, welcher in dem einfachen Gedanken, dem Wiederholen des Vervielfachens, liegt.

Nach dem Wiederholen der einfachen Geschäfte, des Zuzählens und des Vervielfachens, werden zwei Geschäfte zu gleicher Zeit wiederholt, nämlich das Abzählen und Messen, worauf die Zunahme der Grundgröße = 0 gesetzt wird. Diese Vereinigung der beiden Geschäfte wird

Differentiiren genannt, und das Wiederholen dieser Geschäfte das zweite, dritte, vierte, . . . Differential.

Zu dem Abzählen und Messen habe ich noch ein drittes Geschäft, das Vervielfachen gesetzt, und dadurch das Differentiiren mit abwechselndem Vervielfachen hervorgebracht. Werden diese drei Geschäfte in derselben Ordnung wiederholt, so entsteht das zweite, dritte, ... zusammengesetzte Differential. Ausführlich findet man diesen Gedanken ausgeführt in meiner Theorie der Differenzen und Differentiale.

Zuletzt werden die Formen oder die Functionen wiederholt, daher die wiederholenden Functionen. Ist z. B., um hiervon einen Begriff zu geben, die Form

$$f(x) = \frac{a + bx}{x}$$

gegeben, bestehend im Vervielfachen, Zuzählen und Messen, und wird statt x selbst wieder diese Form gesetzt

$$f(fx) = f^2x = \frac{a + b \,.\, fx}{fx} = \frac{a + b \,.\, \frac{a + bx}{x}}{\frac{a + bx}{x}}$$

$$= \frac{ab + (a + b^2)\,x}{a + bx}$$

und wieder statt x die obige Form

$$f\Big(f(fx)\Big) = f^3x = \frac{ab + (a + b^2)\,.\,\dfrac{a + bx}{x}}{a + b\,.\,\dfrac{a + bx}{x}}$$

$$= \frac{a^2 + ab^2 + (2ab + b^3)\,x}{ab + (a + b^2)\,x}$$

so hindert nichts, dieses Wiederholen weiter fortzusetzen. Ich verweise hierüber auf die ausführliche Darstellung in meiner Theorie der Differenzen und Differentiale.

Im Dezember 1832.

Der Verfasser.

Die Schriften des Verfassers, auf welche mehrmals verwiesen wird, sind:

1) Analysis von F. Schweins. Heidelberg, bei Winter. 4. 1820.

2) Theorie der Differenzen und Differentiale, der gedoppelten Verbindungen, der Producte mit Versetzungen, der Reihen, der wiederholenden Functionen, der allgemeinsten Facultäten, und der fortlaufenden Brüche, von F. Schweins. Heidelberg. in 4. 1825.

Inhalt.

Erste Abhandlung.

Seite

Größenlehre, Begriffe 1

Zahlenlehre.

Zahlenreihe 2

Plan der Untersuchung 7

I. Zuzählen 9

II. A. Abzählen 11

B. Zu- und Abzählen 13

III. A. Vervielfachen 19

B. Vervielfachen und Zuzählen 21

C. Vervielfachen und Abzählen 24

IV. A. Messen oder Theilen 28

B. Messen und Zuzählen 36

C. Messen und Abzählen 39

D. Messen und Vervielfachen 41

E. Mehrmaliges Messen 44

Seite

Zwei besondere Fälle des Messens

F. Messen durch 10, 100, 1000, ... 47

G. Gleiche Meßbarkeit 54

V. Schluß, enthaltend die Begriffe von Gleichung und Function, und die Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer und mit mehreren unbekannten Größen. 60

Zweite Abhandlung.

Allgemeinste Verbindungslehre 69

Alle mögliche Verbindungen oder Variationen 70

I. Versetzungen

A. einfache Versetzungen

α) ohne Wiederholungen 74

β) mit Wiederholungen 76

B. vielfache Versetzungen

α) ohne Beschränkung

α_1) ohne Wiederholungen 80

α_2) mit Wiederholungen 85

β) mit Beschränkung

β_1) ohne Wiederholungen 88

β_2) mit Wiederholungen 92

II. geordnete Verbindungen

A. ohne Wiederholungen 94

B. mit Wiederholungen 99

III. geordnete Verbindungen mit Versetzungen aber ohne Wiederholungen 105

IV. alle mögliche Verbindungen zu bestimmten Summen 109

V. geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zur bestimmten Summe 119

Seite

VI. geordnete Verbindungen mit Wiederholungen zur bestimmten Summe 120

Plan für die folgende Untersuchung. 125

Dritte Abhandlung.

Das Wiederholen des Zuzählens 128

Vierte Abhandlung.

I. Das wiederholende Vervielfachen

A. wenn die Grundzahl einfach ist,

α) allgemein 143

β) drei besondere Fälle 148

B. wenn die Grundzahl zusammengesetzt ist, oder gebildet werden soll

α) durch Zuzählen 150

β) — Abzählen 152

γ) — Vervielfachen 153

δ) — Messen 155

II. Verbindung der Glieder der Reihe

A. durch Zuzählen 158

B. — Abzählen 160

C. — Vervielfachen 160

D. — Messen 160

III. Aus einem späteren Gliede die Grundzahl wieder aufsuchen

A. wenn die Grundzahl eine geschlossene ist

α) im Allgemeinen

α_1) aus dem zweiten das erste 162

α_2) aus dem dritten und aus einem späteren dae erste Glied 170

Seite

β) besondere Fälle

β_1) aus einem Producte 172

β_2) aus einem Bruche 173

B. wenn die Grundzahl keine geschlossene Zahl ist 175

C. Das Zurückführen der Grundzahl einer bestimmten Zahl auf die Grundzahl einer niederen Zahl

α) durch Zerlegen in Factoren 178

β) durch Hinzufügen eines Factors 179

D. Allgemeine Untersuchung über die Bildung der Haupt- und Zwischenglieder 181

IV. Aus der Verbindung mehrerer Glieder das erste Glied wieder aufsuchen, oder die Gleichungen 191

V. Jeder Zahl ihre Stelle in der Reihe anweisen oder die Logarithmen. 195

Allgemeine Zahlenlehre.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Grössenlehre.

§. 1.

Größe ist ein einfacher Begriff, der durch seine Klarheit jedes Licht verdunkelt, womit man ihn beleuchten will. Er gibt an, daß Etwas ist, das Veränderliche und Unveränderliche, das Bestimmte und Unbestimmte, das Ganze und seine Theile, das Große und Kleine, das Gleiche und Ungleiche, das Mögliche und Unmögliche.

Die Größe an sich ist Einheit oder Eins und ihre Wiederholung Zahl.

Bei Mehreren Größen kann ihre Vielheit, es kann auch ihr Nebeneinanderseyn, oder ihre Gruppirung beachtet werden. Im ersten Falle haben wir die Zahlenlehre, im zweiten die Verbindungslehre; beide vereint geben die allgemeine Größenlehre.

Die Deutlichkeit des Vortrags fordert, so lange die Untersuchung in der Allgemeinheit, der sie fähig ist, gehalten wird, beide Zweige zu trennen, worauf später die Untersuchung mit beiden vereint weiter fortgeführt werden mag. Daher zuerst die

Zahlenlehre.

§. 2.

Die Zahlenreihe als Gegenstand der Untersuchung, ihr Periodenbau und die allgemeine Bezeichnungsweise.

Die Einheit oder das Eins ist der Anfang einer ins Unbegrenzte fortgehenden Reihe; diese Zahlenreihe ist der Gegenstand der Untersuchung. Bevor wir diese Untersuchung vornehmen, müssen wir Schrift und Sprachzeichen für die Glieder der Reihe festsetzen. Wählen wir für die Eins einen Strich I, so wird die Bezeichnung der späteren Glieder

I , II , III , IIII , . . .

sehr mühsam. Wählen wir aber für jedes Glied ein besonderes Zeichen

1 , 2 , 3 , 4 , . . .
eins zwei drei vier

so reicht kein Gedächtniß hin, alle Zeichen aufzubewahren. Wir beseitigen diese Schwierigkeiten durch folgenden Periodenbau. Wir nehmen gleiche Abtheilungen an, geben in der ersten Abtheilung jedem Gliede ein besonderes Zeichen

1 , 2 , 3 . . . . 9 , 10
eins , zwei , drei, neun , zehn

worin das letzte Glied zusammengesetzt ist aus 0, der **Null**, dem Zeichen des Schlusses, und aus 1, als Zeichen, daß die erste Abtheilung geschlossen ist.

Wir setzen statt der Null alle Zeichen der ersten Abtheilung, und im letzten Gliede 2 statt 1, und erhalten die Zeichen für die zweite Abtheilung

11 , 12 , 13 , ... 19 , 20

Nach demselben Gesetze bilden wir die Sprachzeichen

zehn und eins

zehn und zwei

. . . . .

zehn und neun

zwei zehn

Statt der letzten Null 0 führen wir wieder die Zeichen der ersten Abtheilung ein, und setzen im letzten Gliede 3 statt 2; wir erhalten die Zeichen für die dritte Abtheilung

21 , 22 , 23 , . . , 29 , 30

und eben so die Sprachzeichen

zwei zehn und eins

zwei zehn und zwei

. . . .

zwei zehn und neun

drei zehn.

Nachdem wir nach dieser Idee die 10 ersten Abtheilungen

31 , 32 , ... , 39 , 40

41 , 42 , ... , 49 , 50

. . . .

91 , 92 , ... , 99 , 100

gebildet haben, betrachten wir diese Zehn Abtheilungen als eine höhere Abtheilung, hundert genannt. Wir bilden nach

derselben Weise, nach welcher die zehn kleineren Abtheilungen gebildet sind, zehn höhere Abtheilungen, indem wir an die Stelle der beiden Ausfüllungszeichen oo alle die Zeichen der ersten Hundert Glieder setzen

101 , 102 , ... 199 , 200
201 , 202 , ... 299 , 300
. . . .
901 , 902 , ... 999 , 1000

Die Sprachzeichen werden nach demselben Gesetze gebildet, nach welchen die Schriftzeichen gebildet wurden,

ein hundert und eins
ein hundert und zwei
. . . .
neun hundert und neun
. . . .
zehn hundert oder Tausend

Diese zehn Abtheilungen der Hunderte, wovon das letzte Glied zehn Hundert oder Tausend genannt wird, geben wieder eine höhere Abtheilung. So wie die zehn Abtheilungen der Hunderte, so werden die zehn Abtheilungen der Tausende gebildet, indem an die Stelle der drei Ausfüllungszeichen ooo alle Zeichen der Glieder der ersten Tausende gestellt werden. Diese zehn Abtheilungen der Tausende geben eine höhere Abtheilung der Zehntausende. Der fernere Fortgang führt zu Hunderttausend, Million, ...

Dieses Hinaufsteigen von den niederen zu den höheren Abtheilungen, und dieser periodische Wiederkehr der Zeichen

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, — Ziffern genannt —, wodurch jedes Glied der Reihe mit Leichtigkeit dargestellt wird, ist eine der schönsten und wichtigsten Ideen, die dem menschlichen Geiste entsprungen. Nur bei jenem Volke, bei welchem wir diesen Periodenbau zuerst finden, sehen wir auch die ersten Fortschritte in der Wissenschaft. Nach ihm müssen die Sprachzeichen eben so gebildet werden als die Schriftzeichen. Diese Harmonie ist oft gestört. In unserer Sprache finden folgende Abweichungen statt:

1) Die Glieder 11 und 12 haben noch die beiden einfachen Sprachzeichen eilf und zwölf.

2) Zehn ist in zig übergegangen, und bei 20 das zwei in zwan.

3) Bei den Gliedern 13, 14, ... , 99 werden zuerst die Glieder der ersten und dann die Glieder der zweiten Abtheilung, oder zuerst die Einer und dann die Zehner genannt. Z. B. 7865

   sieben tausend, acht hundert, fünf und sechzig.

   Nur in schriftlichen Abfassungen befolgen wir die gehörige Ordnung, und schreiben

   sieben tausend, acht hundert, sechzig, und fünf.

In anderen Sprachen finden andere Abweichungen statt.

Außer diesen bestimmten haben wir auch unbestimmte Zeichen, nämlich die Buchstaben aus den verschiedenen Alphabe-

ten, die bei besonderen Veranlassungen, um ihre Anzahl zu vermehren, mit Strichen oder auch mit Ziffern versehen werden, als

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots \ldots$$
$$b_1 , b_2 , b_3 , \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Plan der Untersuchung.

§. 3.

Nachdem die Zeichen für die Glieder der Zahlenreihe festgesetzt sind, gehen wir zu ihrer Untersuchung über. Diese besteht in dem Bilden der Zahlen durch Zu- und Abzählen, durch Vervielfachen und Messen oder Theilen. Wir wollen jedes dieser Geschäfte einzeln, und dann diese Geschäfte in Verbindung vornehmen, und zwar in folgender Ordnung:

I. Zuzählen.

II. A. Abzählen.
B. Zu- und Abzählen.

III. A. Vervielfachen.
B. Vervielfachen und Zuzählen.
C. Vervielfachen und Abzählen.

IV. A. Messen oder Theilen.
B. Messen und Zuzählen.
C. Messen und Abzählen.
D. Messen und Vervielfachen.
E. Mehrmaliges Messen.

Zwei besondere Fälle des Messens:

F. Messen durch 10, 100, 1000, . . .
G. Gleiche Meßbarkeit.

V. Schluß.

Die Idee, nach welcher dieser Plan entworfen, umfaßt und verbindet Alles, was in anderen Büchern verworren unter verschiedenen Titeln getrennt ohne alle Ideenverbindung hingestellt wird, nämlich Numeration, vier Species oder vier Rechnungsoperationen, Brüche, Decimalbrüche, Buchstabenrechnung, Proportionen, Gleichungen vom ersten Grade.

Zuzählen.

---

§. 4.

Die Glieder der Zahlenreihe werden durch allmähliges Hinzudenken der Einheit gebildet. Kündigen wir dieses Geschäft durch das Zeichen + an, und trennen durch das Zeichen = das Geschäft von dem, was durch das Geschäft hervorgebracht wird, so können wir dieses allmählige Anhäufen der Einheiten, oder das Fortschreiten in der Zahlenreihe durch folgende Zeichen darstellen:

$$1 + 1 = 2$$
$$2 + 1 = 3$$
$$3 + 1 = 4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Werden die Einheiten mehrerer Glieder vereinigt, so wird ein späteres Glied gebildet, z. B.

$$5 + 4 = 9$$

Es ist hiebei gleichgültig, in welcher Ordnung die zu vereinigenden Einheiten aufeinander folgen, daher auch gleichgültig, ob zuerst die fünf und dann die vier, oder ob zuerst die vier und dann die fünf Einheiten gedacht werden, oder es ist

$$5 + 4 = 4 + 5$$

Daher folgende Wahrheit:

Das Zuzählen kann in willkürlicher Ordnung vorgenommen werden.

In Zeichen läßt sich diese Wahrheit auf folgende Weise darstellen:

$$a + b = b + a$$

oder

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \ldots.$$

Welche Ordnung beim Zuzählen in einem bestimmten Falle statt finden soll, wird durch die Aufeinanderfolge der Zeichen von der Linken zur Rechten angegeben. Soll z. B. zu 24 zuerst 7 und dann 6 gezählt werden, so sind die Zeichen

$$24 + 7 + 6 = 31 + 6 = 37$$

Soll zu 24 zuerst 6 und dann 7 gezählt werden, so geben folgende Zeichen die Ordnung an:

$$24 + 6 + 7 = 30 + 7 = 37$$

Wenn aber zu 7 zuerst 6 und dann die entstandene Zahl 13 zu 24 gezählt werden soll, so kündigen wir diese Ordnung an durch die Zeichen

$$24 + (7 + 6) = 24 + 13 = 37$$

wo durch Klammern angezeigt wird, daß das Geschäft, welches die Zeichen zwischen ihnen angeben, zuerst vorgenommen werden soll.

Der Periodenbau der Zahlenreihe gewährt bei diesem Geschäfte große Vortheile, indem die Abtheilungen von gleicher Größe vereinigt werden; es ist z. B.

$$\begin{aligned} 425 + 361 &= (400 + 300) + (20 + 60) + (5 + 1) \\ &= 700 + 80 + 6 \\ &= 786. \end{aligned}$$

Abzählen.

§. 5.

Mit der Möglichkeit des Gedachten ist auch die Möglichkeit, das Gedachte wieder aufzuheben, gegeben. Dieses Aufheben ist ein Vernichten des ausgeführten Geschäfts. Wir bezeichnen das Ausführen des Geschäfts durch positiv oder bejahet und das Aufheben des Geschäfts durch negativ oder verneint, oder jenes mit + und dieses mit —.

Diese Idee bewährt sich bei allen Geschäften, welche im Verfolge der Wissenschaft hier oder später entwickelt werden. In dem besonderen Falle bei dem Zählen nennen wir das Aufheben des Geschäfts Abzählen.

Ist z. B. 8 gebildet durch Zuzählen der 3 zu 5, und soll dieses Zuzählen wieder aufgehoben, also die vorige Zahl 5 wieder hergestellt werden, so wählen wir für diesen Gedanken die Zeichen

$$8 - 3 = 5$$

und wir sagen: 3 von 8 abzählen führt zu 5, oder 8 weniger 3 gibt 5.

Nach dem Obigen ist + + eine Tautologie aber — — nicht, denn letzteres kündigt an, daß das Aufheben aufgehoben werden, oder das Aufheben nicht statt finden soll; das Vernichten vernichtet sich selbst oder ist sich selbst feind.

Da das Zuzählen zu späteren Gliedern in der Reihe und das Aufheben dieses Zuzählens wieder zu der ursprünglichen

kleineren Zahl führt, so kann auch das Zuzählen ein Vorwärtsgehen und das Abzählen ein Zurückgehen in der Zahlenreihe genannt werden. Es mag aber nicht überflüssig seyn zu bemerken, daß das Vorwärts- und Zurückgehen in der Zahlenreihe nur ein Versinnlichen des Positiven und Negativen, oder des Zuzählens und Abzählens ist.

Der Periodenbau der Zahlenreihe gewährt auch hier bei dem Abzählen, so wie früher bei dem Zuzählen, große Vortheile; indem nämlich bei den Abtheilungen gleicher Größe das Abzählen ausgeführt wird.

$$\begin{array}{r} 8769 \\ 3521 \\ \hline 5248 \end{array}$$

Anmerkung. Unsere Sprache gibt viel zweckmäßiger die entwickelten Begriffe durch Zuzählen und Abzählen an, als die fremdartige Terminologie Addiren und Subtrahiren (und übersetzt das Abziehen), sie gibt immer den Grundbegriff an, nämlich das Zählen, und bezeichnet durch die Vorsilben Zu und Ab das Bilden und das Aufheben des Gebildeten.

Zu- und Abzählen.

§. 6.

Wenn zu 17 zuerst 8 gezählt und dann 5 abgezählt werden,

$$17 + 8 - 5 = 25 - 5 = 20$$

so werden mehr zu- als abgezählt, und nach beendigtem Geschäfte sind zu 17 nur so viele Einheiten gezählt, als 8 größer ist als 5, oder in Zeichen

$$17 + (8 - 5)$$

Es ist gleichgültig, ob die 5 abzuzählenden Einheiten unter den Einheiten in 17 begriffen oder unter den Einheiten unter 8 begriffen gewählt werden, oder in Zeichen

$$17 - 5 + 8$$

Daher folgende Wahrheit:

Das Zu- und Abzählen kann in willkürlicher Ordnung vorgenommen werden.

Oder in Zeichen

$$17 + 8 - 5 = 17 + (8 - 5) = 17 - 5 + 8$$

oder in unbestimmten Zeichen

$$a + b - c = a + (b - c) = a - c + b$$

§. 7.

Hier haben wir nur eine andere Ordnung der Geschäfte gefunden, wir können auch andere Geschäfte statt der vorgegebenen wählen. Soll nämlich 9 von 24 abgezählt und dann 7 zugezählt werden,

$$24 - 9 + 7 = 15 + 7 = 22$$

so werden mehrere Einheiten ab- als zugezählt, und eigentlich werden nur so viele abgezählt, als 9 größer ist als 7, oder in Zeichen

$$24 - (9 - 7) = 24 - 2 = 22$$

Diese Wahrheit kann in folgenden Zeichen angegeben werden

$$24 - 9 + 7 = 24 - (9 - 7)$$

oder

$$a - b + c = a - (b - c)$$

Der Sinn dieser Zeichen ist nämlich:

Das Ab- und Zuzählen kann durch ein Zweimaliges Abzählen ersetzt werden.

§. 8.

Umgekehrt ist ein zweimaliges Abzählen gegeben, und soll 7 von 9 gezählt und die entstandene Zahl 2 von 24 abgezählt werden

$$24 - (9 - 7) = 24 - 2 = 22$$

so wird, wenn 9 abgezählt wird, 7 zu viel abgezählt. Wenn also 9 abgezählt wird, so muß das Abzählen der 7 wieder aufgehoben, oder das Abzählen zernichtet, oder 7 wieder zugezählt werden, oder in Zeichen

$$24 - 9 + 7 = 15 + 7 = 22$$

Es ist folglich

$$24 - (9 - 7) = 24 - 9 + 7$$

Oder

Das zweimalige Abzählen kann durch ein Ab- und Zuzählen ersetzt werden.

§. 9.

Dieses zweimalige Abzählen ist wohl zu unterscheiden von dem Abzählen mit Unterbrechung

$$24 - 9 - 7 = 15 - 7 = 8$$

welches immer durch ein Abzählen ohne Unterbrechung

$$24 - (9 + 7) = 24 - 16 = 8$$

ersetzt werden kann. Oder es ist

$$24 - 9 - 7 = 24 - (9 + 7)$$

oder

$$a - b - c = a - (b + c)$$

§. 10.

Wir zählen eine Zahl ab, welche durch mehrmaliges Zu- und Abzählen entsteht, z. B.

$$98 - (17 - 7 - 4 + 13)$$

Indem wir die Geschäfte in der Ordnung vornehmen, welche die Zeichen vorschreiben, finden wir

$$\begin{array}{r} 17 \\ -\ 7 \\ \hline 10 \\ -\ 4 \\ \hline 6 \\ +\ 13 \\ \hline 19 \end{array}$$

und zuletzt $98 - 19 = 79$

Wollen wir nicht diese Geschäfte ausführen, so können wir auch das abzählen, was zugezählt, und das zuzählen, was abgezählt wurde, denn letzteres sollte nicht abgezählt werden; das Abzählen muß also wieder aufgehoben, also letzteres wieder zugezählt werden. Oder in Zeichen

$$98 - 17 + 7 + 4 - 13$$

Führen wir die Geschäfte aus, so finden wir

$$\begin{array}{r} 98 \\ -\ 17 \\ \hline 81 \\ +\ \ 7 \\ \hline 88 \\ +\ \ 4 \\ \hline 92 \\ -\ 13 \\ \hline 79 \end{array}$$

Durch dieses Aufheben der Klammern oder durch dieses Heraustreten der Zahlen aus den Klammern

$$98 - (17 - 7 - 4 + 13) = 98 - 17 + 7 + 4 - 13$$

wird für das Ganze eine größere Freiheit gewonnen; denn die Geschäfte zwischen den Klammern

$$17 - 7 - 4 + 13$$

können zwar in willkürlicher Ordnung

$$17 - 4 - 7 + 13$$

oder $17 + 13 - 7 - 4$

. . . .

vorgenommen werden, aber nachdem die Zahlen mit entgegengesetzten Zeichen aus ihren Schranken getreten sind, können sie auch mit 98 jede mögliche Verbindung eingehen

$$98 - 17 + 7 + 4 - 13$$

$$7 + 98 - 17 + 4 - 13$$

$$- 17 + 7 + 4 + 98 - 13$$

. . . .

§. 11.

Da durch das Wegräumen der Klammern eine größere Freiheit in Hinsicht der Aufeinanderfolge der durch die Zeichen

angegebenen Geschäfte gewonnen wird, so wird es nicht unnütz seyn, noch an einem Beispiele diejenige Gruppirung zu zeigen, welche häufig gewählt wird. Es seyen deshalb folgende Geschäfte auszuführen:

$$367 - 86 + 93 - 64 - (154 + 36 - 47 - 25)$$

Thun wir zuerst den Zeichen Genüge, so sind die Geschäfte folgende:

367	154
− 86	+ 36
281	190
+ 93	− 47
374	143
− 64	− 25
310	118

und zuletzt

$$310 - 118 = 192$$

Wir leisten Verzicht auf die verschiedenen Gruppirungen, die sowohl mit den Geschäften

$$367 - 86 + 93 - 64$$

unter sich, als auch mit den Geschäften

$$154 + 36 - 47 - 25$$

unter sich möglich sind, und eilen zu der größeren Freiheit, die uns das Hinwegräumen der Klammern gewährt,

$$367 - 86 + 93 - 64 - 154 - 36 + 47 + 25$$

Unter den Gruppirungen, die mit diesen Geschäften vorgenommen werden können, wählen wir folgende:

$$367 - 154 - 86 - 36 + 93 + 47 - 64 + 25$$

und gehen von dieser zu einer anderen über

$$(367 - 154) - (86 + 36) + (93 + 47) - (64 - 25)$$

Nachdem wir diese Geschäfte ausgeführt haben, sind noch folgende übrig

$$213 - 122 + 140 - 39$$

wodurch die früher gefundene Zahl 192 wieder hervorgebracht wird, nämlich

$$\begin{array}{r} 213 \\ -\ 122 \\ \hline 91 \\ +\ 140 \\ \hline 231 \\ -\ 39 \\ \hline 192 \end{array}$$

§. 12.

Statt die Geschäfte, die oben ausgeführt wurden, durch die Zeichen

$$367 - 86 + 93 - 64 - (154 + 36 - 47 - 25)$$

anzukündigen, werden gewöhnlich folgende gewählt:

$$\begin{array}{rl} & 367 - 86 + 93 - 64 \\ \text{abzählen} & 154 + 36 - 47 - 25 \\ \hline \end{array}$$

und, nachdem in der zweiten Reihe die Zeichen geändert sind, die Geschäfte in der Ordnung vorgenommen, welche das Untereinanderstehen der Zahlen gewährt, nämlich

$$\begin{array}{rcrcrcr} 367 & - & 86 & + & 93 & - & 64 \\ 154 & + & 36 & - & 47 & - & 25 \\ - & & - & & + & & + \\ \hline 213 & - & 122 & + & 140 & - & 39 \end{array}$$

Vervielfachen.

§. 13.

Tritt an die Stelle der Einheit, welche durch Wiederholung die Zahl erzeugt, selbst eine Zahl, oder wird eine Zahl mehrmalen gedacht, so zählen wir die Zahl, oder wir haben die Zahl von der Zahl oder ein Product, oder wir vervielfachen.

Dieses Geschäft kündigen wir entweder durch einen Punkt oder durch ein liegendes Kreuz oder bei Buchstaben durch das Nebeneinanderstellen der Buchstaben an. Wird z. B. die Zahl 5 dreimal gedacht, so sind die Zeichen für diesen Gedanken

$$3 . 5 \text{ oder } 3 \times 5$$

und wird a mal die Zahl b gedacht

$$a . b \text{ oder } a \times b \text{ oder } ab$$

Beide Zahlen werden Factoren genannt. Wir wollen hiebei festsetzen, daß die Zahl, welche anzeigt, wie oft eine andere Zahl genommen wird, vor letztere gestellt wird, und sie deshalb auch Vorzahl nennen. Wenn fünf Einheiten dreimal gedacht werden, so wird jede Einheit, die in 5 begriffen ist, dreimal gedacht, mithin sind drei Einheiten so oft vorhanden, als Einheiten in 5 begriffen sind, oder 3 Einheiten sind fünfmal vorhanden. Dreimal 5 und fünfmal 3 erzeugt also dieselbe Menge der Einheiten. Das Gesagte kann durch das Schema

1 1 1 1 1

1 1 1 1 1

1 1 1 1 1

vor Augen gelegt werden, in welchem fünf Einheiten dreimal untereinander, also drei Einheiten fünfmal nebeneinander stehen. Oder in Zeichen

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$$

Daher folgende Wahrheit:

Es ist gleichgültig, in welcher Ordnung das Vervielfachen vorgenommen wird.

Diese Wahrheit ist allgemein, weil die Gründe allgemein sind, die nur, um von etwas Bestimmtem zu reden, an die Zahlen 3 und 5 gehängt sind. Die Gründe bleiben hier unverändert, welche Zahlen auch gewählt werden.

Es mag nicht überflüssig seyn, hier besonders zu erwähnen, daß, wenn wir die eben gefundene Wahrheit durch die Zeichen

$$ab = ba$$

darstellen, die Allgemeinheit der Wahrheit nicht auf der Unbestimmtheit der Zeichen, sondern auf der Allgemeinheit der Gründe ruhet.

Vervielfachen und Zuzählen.

§. 14.

Wenn mehrere Zahlen oftmal z. B. 7 und 8 dreimal genommen werden sollen, so können entweder die Einheiten, in 7 und 8 begriffen, vereinigt, und alle vereint dreimal genommen werden,

$$3\,(7 + 8) = 3 \,.\, 15 = 45$$

oder das Geschäft kann mit Unterbrechung ausgeführt, und zuerst können die 7 Einheiten und dann die 8 Einheiten dreimal genommen, und zuletzt alle Einheiten vereinigt werden

$$3 \,.\, 7 + 3 \,.\, 8 = 21 + 24 = 45$$

Das Gesagte kann in Zeichen so dargestellt werden

$$3\,(7 + 8) = 3 \,.\, 7 + 3 \,.\, 8$$

oder in unbestimmten Zeichen

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

Eben so können wir verfahren, wenn 3 Einheiten 7 und 8 mal genommen werden sollen, entweder ohne Unterbrechung

$$(7 + 8)\,3 = 15 \,.\, 3 = 45$$

oder mit Unterbrechung

$$7 \,.\, 3 + 8 \,.\, 3 = 21 + 24 = 45$$

Daß beide Wege zum Ziele führen, kann durch folgende Zeichen angegeben werden:

$$(7 + 8)\,3 = 7 \,.\, 3 + 8 \,.\, 3$$

oder

$$(b + c)\,a = ba + ca$$

Daher folgende Wahrheit:

Es ist gleichgültig, ob erst zugezählt und dann vervielfacht, oder ob erst vervielfacht und dann zugezählt wird.

§. 15.

Wenn dem Vervielfachen das Zuzählen mehrmalen vorhergehen soll

$$(3 + 2)(7 + 8) = 5 . 15 = 75$$

so findet die so eben gefundene Wahrheit zweimal ihre Anwendung; nämlich 7 + 8 kann erst 3 mal und dann 2 mal genommen

$$3 (7 + 8) + 2 (7 + 8)$$

und dann wieder 7 und 8 mit Unterbrechung 3 und zuletzt wieder jedes 2 mal genommen werden

$$3 . 7 + 3 . 8 + 2 . 7 + 2 . 8$$

Die Ordnung, in welcher das Zuzählen und Vervielfachen vorgenommen wird, ist also immer gleichgültig.

Dieses ist der Sinn der Zeichen

$$(3 + 2)(7 + 8) = 3 . 7 + 3 . 8 + 2 . 7 + 2 . 8$$

oder der Zeichen

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

§. 16.

Diese Freiheit in der Wahl der Ordnung des Zuzählens und Vervielfachens, verbunden mit dem Periodenbaue der Zahlenreihe, gewährt die große und bekannte Bequemlichkeit beim Vervielfachen der Zahlen, welche aus mehreren Abtheilungen bestehen, z. B.

$$756 \times 843 = (700 + 50 + 6)(800 + 40 + 3)$$

$$= 700 \,.\, 800 + 50 \,.\, 800 + 6 \,.\, 800$$

$$+ 700 \,.\, 40 + 50 \,.\, 40 + 6 \,.\, 40$$

$$+ 700 \,.\, 3 + 50 \,.\, 3 + 6 \,.\, 3$$

$$\begin{array}{r} = 560000 \\ 40000 \\ 4800 \\ 28000 \\ 2000 \\ 240 \\ 2100 \\ 150 \\ 18 \\ \hline 637308 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} 756 \\ 843 \\ \hline 2268 \\ 3024 \\ 6048 \\ \hline 637308 \end{array}$$

Vervielfachen und Abzählen.

---

§. 17.

Das Abzählen der Zahl 5 geben wir an durch die Zeichen

$$-5$$

und das sechsmalige Abzählen dieser Zahl durch die Zeichen

$$6 \times -5 \text{ oder } -6 \times 5 \text{ oder } -(6 \times 5)$$

So wie in der Sprache die Worte eine verschiedene Stellung haben können, als 5 abzählen 6 mal oder 6 mal 5 abzählen oder abzählen 5 sechsmal, eben so auch die Zeichen $\times$ und $-$.

§. 18.

Soll 8 weniger 5 oder soll 3 viermal genommen werden,

$$4\,(8 - 5) = 4 \,.\, 3 = 12$$

so sind wir nicht an diese Ordnung gebunden, und wir gehen leicht zu einer anderen Ordnung über, wenn wir bemerken, daß, wenn 8 genommen, 5 zu viel genommen, und wenn 8 viermal genommen, auch 5 viermal zu viel genommen wird, oder in Zeichen

$$4 \,.\, 8 - 4 \,.\, 5 = 32 - 20 = 12$$

Beim Obigen wurde zuerst abgezählt und dann vervielfacht, beim Letzteren wurde erst vervielfacht und dann abgezählt. Daß beides zu demselben Ziele führt, können wir durch folgende Zeichen angeben:

$$4\,(8 - 5) = 4 \,.\, 8 - 4 \,.\, 5$$

$$\text{oder } a\,(b - c) = ab - ac$$

Dasselbe finden wir, wenn (8 — 5) mal oder 3 mal die Zahl 4 genommen werden soll,

$$(8 - 5)\,4 = 3 \cdot 4 = 12$$

denn wird 4 achtmal genommen, so wird 4 fünfmal zu viel genommen

$$8 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 32 - 20 = 12$$

Wir können also auch hier die Ordnung der Geschäfte umkehren oder in Zeichen

$$(8 - 5)\,4 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4$$

oder

$$(a - b)\,c = ac - bc$$

§. 19.

Soll 8 — 5 sechsmal abgezählt werden, so können wir diesen Gedanken anzeigen durch

$6 \times -(8 - 5)$ oder durch $-6 \times (8 - 5) = -6 \cdot 3 = -18$

Änderen wir aber die Ordnung der Geschäfte, und zählen 8 sechsmal ab, so zählen wir 5 sechsmal zu viel ab; wir müssen also 5 sechsmal wieder zuzählen oder das Abzählen von 6 . 5 wieder zernichten, oder in Zeichen

$$-6 \times 8 + 6 \times 5 = -48 + 30 = -18$$

Beim Obigen wird das Vervielfachen zuletzt, und bei diesem zuerst vorgenommen. Wir haben hier also eine veränderte Ordnung und zugleich andere Geschäfte; daß beides zu demselben Ziele führt, wird angegeben durch die Zeichen

$$-6\,(8 - 5) = -6 \cdot 8 + 6 \cdot 5$$

oder

$$-a\,(b - c) = -ab + ac$$

§. 20.

Kommt mit dem Vervielfachen das Abzählen mehrmal vor,

$$(9 - 7)(8 - 5) = 2 . 3 = 6$$

so gelangen wir am schnellsten zum Ziele, wenn wir erst abzählen und dann vervielfachen. Wollen wir aber das Vervielfachen zuerst vornehmen, so nehmen wir 8 — 5 neunmal und erhalten dadurch 8 — 5 siebenmal zuviel oder in Zeichen

$$9(8 - 5) - 7(8 - 5)$$

Nehmen wir nun 8 neunmal, so erhalten wir 5 neunmal zu viel, und zählen wir 8 siebenmal ab, so zählen wir 5 siebenmal zu viel ab, oder in Zeichen

$$9 . 8 - 9 . 5 - 7 . 8 + 7 . 5$$

Wir gelangen also zu demselben Ziele, wir mögen das Vervielfachen zuletzt oder zuerst vornehmen, oder in Zeichen

$$(9 - 7)(8 - 5) = 9 . 8 - 9 . 5 - 7 . 8 + 7 . 5$$

oder

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Wird das Vervielfachen zuerst vorgenommen, so müssen einige Producte zu und andere abgezählt werden. Wenn wir den Sinn der Zeichen, welche zusammenkommen, gehörig würdigen, so ist es nie zweifelhaft, ob zu oder ob abgezählt werden muß; denn

$+ +$ ist Tautologie, und wir setzen nur einmal das Zuzählungszeichen $+$ hin

$- +$ bedeutet: das Zuzählen aufheben also abzählen.

$- -$ bedeutet das Aufheben des Aufhebens also Zuzählen.

Wollen wir z. B. nicht erst zu- und abzählen und dann vervielfachen, wie es die Zeichen

$$(20 + 17 - 15)(27 - 9 - 8)$$

fordern, sondern erst vervielfachen und dann zu- und abzählen, so sind folgende Geschäfte vorzunehmen:

$$\begin{array}{l} 20 \cdot 27 + 17 \cdot 27 - 15 \cdot 27 \\ - 20 \cdot 9 - 17 \cdot 9 + 15 \cdot 9 \\ - 20 \cdot 8 - 17 \cdot 8 + 15 \cdot 8 \end{array}$$

Wenn die Zahlen durch Buchstaben vorgestellt werden

$$(a - b - c + d)(f - g + h)$$

so kann ohnehin keins der angezeigten Geschäfte ausgeführt werden, weder das Zu- und Abzählen, noch das Vervielfachen, und wir können nur durch Zeichen ankündigen, daß wir auch erst vervielfachen und dann zu- und abzählen können, nämlich

$$\begin{array}{l} af - bf - cf + df \\ - ag + bg + cg - dg \\ + ah - bh - ch + dh \end{array}$$

Theilen oder Messen.

§. 21.

Auf das Bilden der Zahl durch das Vervielfachen folgt das Aufheben oder das Zernichten dieses Geschäfts.

Die Zahl, welche durch das Vervielfachen gebildet wurde, tritt jetzt auf als ein Ganzes, einer der Factoren als Theil dieses Ganzen oder als Maaß desselben, und der andere Factor gibt an, aus wie vielen Theilen das Ganze besteht, oder wie oft das Maaß im Ganzen enthalten ist. Ist z. B. 12 gebildet, indem 4 dreimal genommen wurde, so ist 4 ein Theil von 12 und zwar der dritte Theil, oder 4 ist das Maaß, welches in 12 dreimal enthalten ist.

Da das Vervielfachen in willkürlicher Ordnung vorgenommen werden kann, oder die 3, viermal genommen, dieselbe Zahl 12 erzeugt, so können die beiden Factoren ihre Rolle wechseln. Dann besteht 12 aus 4 Theilen, wovon jeder 3 ist, oder in 12 ist das Maaß 3 viermal enthalten.

Diese gegenseitigen Beziehungen sind zu beachten, wenn das Bildungsgeschäft, welches Vervielfachen genannt wurde, wieder aufgehoben werden soll; denn wir können dem Factor, der nicht mehr vorkommen soll, sowohl die Bedeutung des Theils oder des Maaßes als auch die Bedeutung der Vielheit unterlegen.

Kündigen wir dieses Aufheben des Vervielfachens durch einen Strich unter dem Producte oder durch zwei Punkte neben dem Producte, und weisen dem Factor, der nicht mehr im

Producte vorkommen soll, den Platz unter dem Striche oder neben den beiden Punkten an, so kann

$$\frac{12}{3} \text{ oder } 12 : 3$$

bedeuten 1) wie groß ist der dritte Theil von 12, oder wie groß ist das Maaß, das in 12 dreimal enthalten ist?

oder auch bedeuten 2) der wievielte Theil ist 3 von 12 oder wie oft ist 3 in 12 enthalten?

Theilen und Messen stimmen also vollkommen überein, sowohl, wenn wir nach der Größe, als wenn wir nach der Vielheit des Theils oder des Maaßes fragen.

§. 22.

Jede Zahl kann als Product zweier anderer Zahlen betrachtet werden, von denen also auch ein Factor aufgehoben werden kann. Damit dieses allgemein möglich ist, müssen wir die Einheit nach Willkür in Theile zerlegen können. Zerlegen wir sie in 3 Theile, so kann nach dem Obigen

$$\frac{1}{3}$$

bedeuten die Größe des Theils, kann auch bedeuten 1 in 3 Theile zerlegen.

Bedeuten diese Zeichen die Größe des Theils, so können mehrere z. B. 2 Theile angegeben werden durch

$$2 \times \frac{1}{3}$$

Erscheint aber $\frac{1}{3}$ als die Zahl, welche anzeigt, wie oft 2 genommen werden soll, so sind die Zeichen

$$\frac{1}{3} \times 2$$

Beides führt aber zu demselben Ziele, welches durch folgende Betrachtungen deutlich wird:

Wir können 2 als ein Ganzes (Continuum) ohne Rücksicht auf seine Bestandtheile betrachten, und dieses Ganze in 3 Theile zerlegen. Dieses ist der Sinn von

$$\frac{1}{3} \times 2$$

Wir können aber auch 2 in seine Bestandtheile oder in seine Einheiten auflösen, $1 + 1$ und von jeder Einheit den dritten Theil nehmen, und dieses ist der Sinn der Zeichen

$$2 \times \frac{1}{3}$$

Es bedeutet also

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 2$$

das Erstere die Aufgabe und das darauf Folgende zwei verschiedene Auflösungen derselben.

Wenn ein Beispiel nöthig ist, so werde ein Stab gewählt, der 2 Fuß lang ist, und von welchem der dritte Theil genommen werden soll. Dieses ist die Aufgabe, welche in den Zeichen

$$\frac{2}{3}$$

vorgelegt wird. Wir können ihn auf der Seite, auf welcher die Fuße nicht bemerkt sind, in drei gleiche Theile zerlegen, und einen Theil nehmen. Dieses Verfahren geben wir an durch

$$\frac{1}{3} \times 2$$

Wir können aber auch auf der andern Seite, wo die Füße bemerkt sind, jeden Fuß in drei gleiche Theile zerlegen, und von jedem Fuße den dritten Theil nehmen; wir erhalten zwei

Theile, wovon jeder der dritte Theil der Einheit ist, oder in Zeichen

$$2 \times \frac{1}{3}$$

Diese beide Auflösungsweisen sind wohl zu beachten, oft wird die eine statt der anderen gewählt, wenn diese leichter zum Ziele führt. Nur sie verbreiten Licht bei den Uebergängen von bestimmten Geschäften zu anderen Geschäften.

Wollen wir das Vorgetragene durch Buchstaben darstellen, um anzuzeigen, daß die Wahrheit allgemein ist, so können wir folgende Zeichen wählen:

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times a$$

§. 23.

Gehen wir über zu den Zahlen, die größer als der aufzuhebende Factor sind,

$$\frac{14}{3}$$

so wird nichts an dem eben Gesagten geändert, und wir können die beiden Auflösungsweisen wählen, welche durch die Zeichen

$$\frac{14}{3} = \frac{1}{3} \times 14 = 14 \times \frac{1}{3}$$

vorgestellt werden. Wir können aber der Aufgabe, welche in den Zeichen $\frac{14}{3}$ vorgelegt ist, noch auf andere Weisen Genüge thun.

Ist nämlich 3 die Größe des Maaßes, womit 14 ausgemessen werden soll, und es soll angegeben werden, wie oft dieses Maaß vorhanden ist, so finden wir, daß, nachdem das

Maaß 3 viermal abgezählt worden, noch zwei Einheiten übrig sind, wovon jede der dritte Theil des Maaßes ist. Das Maaß 3 ist also 4 mal und von diesem Maaße sind noch zwei Drittel vorhanden.

Ist aber 3 die Vielheit, und wir suchen die Größe des Maaßes oder des Theils, so finden wir für dieses Maaß 4 Einheiten und noch den dritten Theil zweier Einheiten.

In beiden Fällen wählen wir die Zeichen

$$\frac{14}{3} = 4\,\frac{2}{3}$$

§. 24.

Da das Vervielfachen in willkürlicher Ordnung vorgenommen werden kann, so findet auch dieselbe Freiheit beim Aufheben dieses Geschäfts statt; es ist daher gleichgültig, ob vom Producte 2 . 3 . 5 zuerst der Factor 3 und dann der Factor 5, oder ob zuerst dieser und dann jener, oder ob beide Factoren zugleich aufgehoben werden, oder in Zeichen

$$\frac{\frac{30}{3}}{5} = \frac{\frac{30}{5}}{3} = \frac{30}{3\,.\,5}$$

Gehen wir in die Natur des Geschäfts ein, und gehen hiebei von der Einheit aus, so bedeutet

$$\frac{\frac{1}{3}}{5}$$

den fünften Theil vom dritten Theile, oder die Einheit in drei Theile und dann jeden dieser Theile wieder in 5 Theile zerlegen, wodurch die Einheit in 3 mal 5 Theile zerlegt wird. Hingegen

$$\frac{\frac{1}{5}}{3}$$

bedeutet: die Einheit zuerst in 5 Theile und dann jeden Theil wieder in 3 Theile zerlegen, wodurch wieder die Einheit in 5 mal 3 Theile, also in die vorige Anzahl Theile zerlegt wird.

Um die Allgemeinheit dieser Wahrheit durch Buchstaben anzugeben, können folgende gewählt werden:

$$\frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{a} = \frac{1}{a \cdot b}$$

§. 25.

Wird eine Zahl durch eine andere vervielfacht, und dieses Geschäft wieder aufgehoben, so ist dadurch nichts geändert oder

$$4 = \frac{4 \cdot 5}{5}$$

Diese Freiheit erstreckt sich weiter; wir können zwischen das Messen zweier Zahlen ein Vervielfachen mit einer dritten Zahl einschieben, wenn wir nur dieses Vervielfachen nach jenem Messen wieder aufheben. Soll z. B. 4 durch 3 gemessen werden, so können wir diesem Messen das Vervielfachen mit 5 vorhergehen, und nach dem Messen mit 3 ein zweites Messen folgen lassen, oder in Zeichen

$$\frac{4}{3} = \frac{\frac{4 \cdot 5}{3}}{5} \text{ oder } \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5}$$

Damit hierüber keine Dunkelheit zurückbleibt, so mögen

$$\frac{4}{3}$$

als 4 Theile angesehen werden, wovon jeder der dritte Theil der Einheit ist. Werden diese 4 Theile 5 mal genommen

$$\frac{4 \cdot 5}{3}$$

so sind die 4 Theile der fünfte Theil dieses Fünffachen, oder in Zeichen

$$\frac{4}{3} = \frac{\frac{4 \cdot 5}{3}}{5}$$

Da nun der fünfte Theil vom dritten Theil der dreimal fünfte Theil ist, so ist

$$\frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5}$$

Oder wir können dieses Zwischenschieben des Vervielfachens und das spätere Wiederaufheben desselben auch so verdeutlichen: Wird jeder dritte Theil der Einheit, wovon 4 Theile vorhanden sind, in 5 Theile zerlegt, so werden die 3 Theile in 3 mal 5 und die 4 Theile in 4 mal 5 kleinere Theile zerlegt; es entstehen also 4 mal 5 Theile, wovon jeder der 3 mal fünfte Theil der Einheit ist.

Dieses Zwischenschieben des Vervielfachens und sein späteres Wiederaufheben kann auch als ein Vervielfachen zweier Zahlen, wovon die eine die andere mißt, mit einer und derselben dritten Zahl dargestellt, und in folgenden Zeichen vorgelegt werden.

$$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$$

Ist das Vervielfachen gestattet, so kann es auch wieder aufgehoben werden, oder in Zeichen

$$\frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a}{b}$$

§. 26.

Da das Vervielfachen mit einer dritten Zahl als ein weiteres Zerlegen der gegebenen Theile in kleinere Theile angesehen werden kann, so wird es immer dort vorkommen, wo ungleiche Theile in ungleicher Menge in Hinsicht ihres Werthes gegen einander gewürdigt werden sollen. Z. B.

$$\frac{5}{7} \text{ und } \frac{8}{11}$$

Da die Theile ungleich sind, so wird eine neue Theilung vorgenommen, so daß die Theile gleich werden. Wir theilen jeden siebenten Theil in 11 Theile und jeden eilften Theil in 7 Theile, oder in Zeichen

$$\frac{11 \cdot 5}{11 \cdot 7}, \frac{7 \cdot 8}{7 \cdot 11}$$

oder

$$\frac{55}{77}, \frac{56}{77}$$

und finden jetzt, daß $\frac{8}{11}$ mehr sind als $\frac{5}{7}$

§. 27.

Zuletzt, ehe wir das Theilen an und für sich verlassen, mag noch angeführt werden, daß die Zahl, wodurch getheilt wird, Nenner, und die Zahl, welche getheilt wird, Zähler, und beide vereint, Bruch genannt werden. Hiezu kommt noch die Benennung ächter und unächter Bruch, wenn entweder der Zähler kleiner oder größer als der Nenner ist; ferner gemischter Bruch, wenn er mit einer ganzen Zahl verbunden ist, im Gegensatze eines reinen Bruchs, wenn neben ihm keine ganze Zahl vorkommt. Diese Benennungen mögen gebraucht werden, so lange auf dieselben kein größerer Werth gelegt wird, als sie verdienen.

Messen und Zuzählen.

§. 28.

Soll 14 zu 21 gezählt und die Zahl 35 durch 7 gemessen werden, so sind die Zeichen für diese Geschäfte

$$\frac{14 + 21}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

Es soll untersucht werden, wie oft 7 vorhanden ist. Wir können dieses Geschäft ohne Unterbrechung, wie so eben geschehen ist, wir können es auch mit Unterbrechung vornehmen. Im letzteren Falle untersuchen wir nämlich, wie oft 7 in 14 und dann wie oft 7 in 21 begriffen ist, und vereinigen die Zahlen 2 und 3, welche anzeigen, wie oft 7 Einheiten vorhanden sind, oder in Zeichen

$$\frac{14}{7} + \frac{21}{7} = 2 + 3 = 5$$

Wir finden also auch hier wieder Freiheit in der Wahl der Ordnung dieser Geschäfte, des Messens und Zuzählens.

Diese Freiheit geben wir an durch die Zeichen

$$\frac{14 + 21}{7} = \frac{14}{7} + \frac{21}{7}$$

oder

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

§. 29.

Ist nicht die Größe des Maaßes oder des Theiles, sondern ist die Vielheit gegeben, oder fragen wir bei den Zeichen

$$\frac{14 + 21}{7}$$

nicht wie oft der Theil 7 vorhanden, sondern wie groß ist der Theil, welcher 7 mal in 14 + 21 enthalten ist, oder wie groß ist der siebente Theil von 14 + 21? so können wir auf gleiche Weise verfahren, entweder ohne oder mit Unterbrechung, nämlich entweder das Ganze 35 in sieben gleiche Theile zerlegen, oder wir können den siebenten Theil von Allem, was in dem Ganzen enthalten ist, also den siebenten Theil von 14 und den siebenten Theil von 21 nehmen, oder in Zeichen

$$\frac{14}{7} + \frac{21}{7}$$

Wir mögen also die Anzahl der Theile oder die Größe der Theile suchen, immer bewährt sich die oben gefundene Freiheit in Hinsicht der Aufeinanderfolge des Messens und Zuzählens.

§. 30.

Es findet noch eine dritte Betrachtungsweise statt, die aber eigentlich der zweiten untergeordnet ist, wenn wir nämlich jede Einheit in Theile zerlegen und von jeder derselben den siebenten Theil nehmen. Im ersteren Falle zählen wir die Theile 14 + 21 oder 35 Theile ununterbrochen, im zweiten Falle mit Unterbrechung, zuerst 14 und dann 21 Theile.

§. 31.

Diese Freiheit beim Zuzählen und Messen findet aber nur dann statt, wenn durch dieselbe Zahl gemessen werden soll, oder wenn gleiche Theile vorhanden sind. Z. B.

$$\frac{9}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9 + 4}{5}$$

Wenn aber keine gleiche Theile vorhanden sind,

$$\frac{8}{5} + \frac{4}{7}$$

so muß eine neue Theilung vorgenommen werden, so daß gleiche Theile entstehen. Es wird im vorliegenden Falle jeder fünfte Theil in 7 und jeder siebente Theil in 5 Theile zerlegt,

$$\frac{7 \cdot 8}{7 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 7} \text{ oder } \frac{56}{35} + \frac{20}{35}$$

Nach vollendeter Theilung kann eine andere Ordnung der Geschäfte gewählt werden, nämlich

$$\frac{56 + 20}{35}$$

Dasselbe findet statt, wenn mehrmalen gemessen und zugezählt werden soll. Z. B.

$$\frac{9}{5} + \frac{4}{7} + \frac{15}{11}$$

Es wird jeder 5te Theil in 7 . 11 oder in 77 Theile

. . . . . 7 . . . 5 . 11 . . 55

. . . . . . 11 . . . 5 . 7 . . 35

zerlegt

$$\frac{7 \cdot 11 \cdot 9}{7 \cdot 11 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 11 \cdot 4}{5 \cdot 11 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 15}{5 \cdot 7 \cdot 11}$$

oder

$$\frac{539}{385} + \frac{220}{385} + \frac{525}{385}$$

worauf die Ordnung des Messens und Zuzählens geändert werden kann

$$\frac{539 + 220 + 525}{385} = \frac{1284}{385}$$

Werden Buchstaben als Zeichen der Zahlen gewählt, so können die Vorbereitungen, welche gemacht werden müssen, bevor die Ordnung der Geschäfte geändert werden kann, und diese Anordnung selbst auf folgende Weise angegeben werden

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{f}{g} = \frac{dga}{dgb} + \frac{bgc}{bdg} + \frac{bdf}{bgd}$$

$$= \frac{dga + bgc + bdf}{bdg}$$

Messen und Abzählen.

§. 32.

Soll 28 von 42 gezählt, und die Zahl 14 durch 7 gemessen werden

$$\frac{42 - 28}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

so kann auch erst gemessen, und dann abgezählt werden

$$\frac{42}{7} - \frac{28}{7} = 6 - 4 = 2$$

denn bedeutet 7 die Größe des Maaßes, so ergeben sich in dem letzteren Falle bei dem Messen der 42 durch 7 so viele Einheiten zuviel, als 7 in 28 begriffen ist.

Es findet also auch beim Messen und Abzählen Freiheit in der Aufeinanderfolge der Geschäfte statt, und dieses ist der Sinn der Zeichen

$$\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

Fragen wir nicht nach der Anzahl der Theile, sondern nach der Größe des Theiles, so finden wir dasselbe; denn da 42 aus 28 und 14 besteht, so ist der siebente Theil von 42 um den siebenten Theil von 28 größer als der siebente Theil von 14 oder von 42—28.

Auch können wir sagen, daß, wenn wir zu den Theilen der Einheit heruntersteigen, 42—28 Theile sowohl durch

$$\frac{42 - 28}{7}$$

als durch

$$\frac{42}{7} - \frac{28}{7}$$

angegeben werden können.

§. 33.

Die Ordnung beim Messen und Abzählen kann aber nur dann geändert werden, wenn durch dieselbe Zahl zwei andere Zahlen getheilt werden sollen. Findet das Gegentheil statt

$$\frac{14}{9} - \frac{5}{8}$$

so muß eine neue Theilung vorgenommen werden, so daß gleiche Theile entstehen

$$\frac{8 \cdot 14}{8 \cdot 9} - \frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 8} \text{ oder } \frac{112}{72} - \frac{45}{72}$$

und nach diesen Vorbereitungen kann eine andere Ordnung gewählt werden

$$\frac{112 - 45}{72} = \frac{67}{72}$$

Oder wenn Buchstaben als Zeichen der Zahlen gewählt werden

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{da}{db} - \frac{bc}{bd} = \frac{da - bc}{bd}$$

Messen und Vervielfachen.

---

§. 34.

Die Zahl 7 ist in 28 viermal begriffen, und so oft 28 durch 7 gemessen wird, so oft entsteht 4; mithin ist 7 in 5 mal 28 fünfmal so oft enthalten, als 7 in 28 enthalten ist, oder in Zeichen

$$\frac{5 \times 28}{7} = 5 \times \frac{28}{7}$$

Oder ist 7 die Vielheit, und es soll die Größe des Theiles gesucht werden, so bedeutet das erstere den siebenten Theil vom Ganzen (continuum) nämlich von 140, und das letztere den siebenten Theil jedes Bestandtheils 28.

Oder drittens, wenn ersteres 5 mal 28 Theile bedeutet, wovon jeder der siebente Theil der Einheit ist, und zwar alle Theile vereint, so bedeutet letzteres dieselbe Menge der Theile aber in fünf verschiedenen Malen, oder ersteres in einem und letzteres in fünf Haufen.

Dieses sind die verschiedenen Bedeutungen, welche obigen Zeichen unterlegt werden können, oder auch den Zeichen

$$\frac{a \times b}{c} = a \times \frac{b}{c}$$

und jede führt zu der allgemeinen Wahrheit:

Es ist gleichgültig, ob erst vervielfacht und dann gemessen oder erst gemessen und dann vervielfacht wird.

§. 35.

Soll selbst die Zahl 5, welche anzeigt, wie oft $\frac{28}{7}$ genommen werden soll, erst durch das Messen von 30 mit 6 hervorgebracht werden, so sind die Zeichen folgende

$$\frac{30}{6} \times \frac{28}{7} = 5 \times 4 = 20$$

Wollen wir aber nicht zuerst messen, und dann vervielfachen, so können wir durch folgende Betrachtungen zu einer anderen Ordnung übergehen: Nehmen wir $\frac{28}{7}$ dreizig mal

$$30 \times \frac{28}{7}$$

oder nach dem Vorhergehenden im vorigen §

$$\frac{30 \times 28}{7}$$

so nehmen wir $\frac{28}{7}$ sechsmal zu viel. Das, was wir suchen ist also der sechste Theil von Vorstehendem oder in Zeichen

$$\frac{\frac{30 \,.\, 28}{7}}{6}$$

Da nun der sechste Theil vom siebenten Theile der 6 mal siebente Theil ist, so ist das Verlangte

$$\frac{30 \times 28}{6 \times 7}$$

Hier wird zuerst vervielfacht und dann gemessen, und um anzuzeigen, daß diese Ordnung zu demselben Ziele führt, als die frühere, wählen wir die Zeichen

$$\frac{30}{6} \times \frac{28}{7} = \frac{30 \times 28}{6 \times 7}$$

oder auch

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Wenn also auch mehrmalen gemessen werden soll, so findet doch immer Freiheit in der Wahl der Ordnung des Messens und Vervielfachens statt.

Mehrmaliges Messen.

§. 36.

144 durch 6, und 8 durch 4, und dann die Zahl 24, welche im ersten, durch die Zahl 2, welche im anderen Falle entsteht, messen. Diese Geschäfte können angegeben werden durch die Zeichen

$$\frac{144}{6} : \frac{8}{4} = 24 : 2 = 12$$

§. 37.

Dieses dreimalige Messen kann durch andere Geschäfte ersetzt werden, zu welchen uns verschiedene Betrachtungsweisen führen. Die erste ist folgende: Soll 144 durch 6 und dann wieder durch 8 gemessen werden,

$$\frac{\frac{144}{6}}{8} \text{ oder } \frac{144}{6} : 8 = 24 : 8 = 3$$

so wird nach dem Früheren in §. 24 derselbe Zweck erreicht, wenn 144 durch 6 mal 8 gemessen wird

$$\frac{144}{6 \times 8} = \frac{144}{48} = 3$$

Der vierte Theil von 8 ist aber 4 mal mehr in $\frac{144}{6}$ oder in 24 enthalten, als 8 in demselben enthalten ist. Vorstehendes muß also 4 mal genommen werden

$$4 \times \frac{144}{6 \times 8} = \frac{4 \times 144}{6 \times 8}$$

Das dreimalige Messen kann also ersetzt werden durch ein zweimaliges Vervielfachen und durch ein Messen, oder in Zeichen

$$\frac{144}{6} : \frac{8}{4} = \frac{4 \times 144}{6 \times 8}$$

oder

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{d \times a}{b \times c}$$

§. 38.

Zweite Betrachtungsweise.

Wir gehen hiebei zu Theilen der Einheit herunter, und geben den Zeichen

$$\frac{144}{6} : \frac{8}{4}$$

die Bedeutung: Wie oft sind 8 Theile, wovon jeder der vierte Theil der Einheit ist, begriffen unter 144 Theilen, wovon jeder der sechste Theil der Einheit ist?

Nehmen wir eine neue Theilung vor, so daß gleiche Theile entstehen, und zerlegen deshalb jeden sechsten Theil in 4 und jeden vierten Theil in 6 Theile, so entstehen 4 mal 6 oder 24 Theile

$$\frac{4 \times 144}{4 \times 6} : \frac{6 \times 8}{4 \times 6}$$

Bemerken wir nun, daß 6 × 8 Theile in 4 × 144 Theile eben so oft enthalten sind, als 6 × 8 Einheiten in 4 × 144 Einheiten, und daß wir durch Unterdrückung der Zahl 4 × 6, wodurch die Größe der Theile angegeben wird, anzeigen können, daß die Größe der Theile nichts beiträgt, so haben wir nur folgende Geschäfte auszuführen

$$\frac{4 \times 144}{6 \times 8}$$

dieselben Geschäfte, welche bei der ersteren Betrachtungsweise gefunden worden *).

---

*) Das Messen $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ darf nicht durch

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

ersetzt werden; denn dieses würde bedeuten: a messen durch b, wieder durch c und wieder durch d messen, würde also bedeuten

$$\frac{a}{b \cdot c \cdot d}$$

Man will diesen Fehler wieder gut machen, daß man den Strich zwischen b und c größer als die übrigen macht. Allein der Strich, groß oder klein, bedeutet, daß das, was über ihm steht, durch das, was unter ihm steht, gemessen werden soll. Nur durch Klammer kann man sich helfen, nämlich

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}$$

Erster besonderer Fall des Messens,

wenn das Maaſs 10, 100, 1000, ... ist.

---

§. 39.

In dem Periodenbaue der Zahlenreihe ist angenommen, daß jede Stelle zur Linken das Zehnfache der Stelle zur Rechten anzeige. Diesem Gedanken folgend, vervielfachen wir jede Zahl mit 10, wenn wir jede Ziffer derselben um eine Stelle nach der Linken, und messen sie durch 10, wenn wir jede Ziffer um eine Stelle nach der Rechten rücken. So ist

70 das Zehnfache von 7
700 „ „ 70
. . . .

und umgekehrt der zehnte Theil von 700 ist 70
. . . . 70 . 7

Soll nun weiter durch 10, 100, ... gemessen werden, so muß 7 wieder um eine, um zwei, ... Stellen zur Rechten gerückt werden. Dieses nöthigt ein Zeichen einzuführen, wodurch die Rangordnung der Stellen angegeben wird. Wir wählen hiezu den einfachen Strich, nämlich

,7 bedeutet den 10ten Theil von 7
,07 „ 100 „ „ 7
,007 „ 1000 „ „ 7
. . . .

Soll nach diesem der 10te Theil von 687 dargestellt werden, so wird der 10te Theil von 600, von 80, von 7 angegeben, wenn jede Ziffer um eine Stelle zur Rechten gerückt wird, nämlich

$$\frac{687}{10} = \frac{600}{10} + \frac{80}{10} + \frac{7}{10} = 60 + 8 + \frac{7}{10} = 68,7$$

Ebenso, wenn durch 100 gemessen wird, muß jede Ziffer um zwei Stellen zur Rechten gerückt werden,

$$\frac{687}{100} = \frac{600}{100} + \frac{80}{100} + \frac{7}{100} = 6 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} = 6,87$$

Wenn die Stelle zur Linken des Striches nicht besetzt ist, so wird gewöhnlich die erste Stelle mit dem Ausfüllungszeichen, mit der Null, besetzt. Z. B.

0,7
0,07

§. 40.

Durch das Einführen des Striches geben wir dem Periodenbaue der Zahlenreihe eine größere Ausdehnung, und können das Messen in Verbindung mit dem Zu- und Abzählen, und mit dem Vervielfachen in wenigeren Zeichen und mit der Bequemlichkeit darstellen, die früher nur der Periodenbau gewährte. Z. B. statt

$$\frac{785}{100} + \frac{63}{1000} = \frac{7850 + 63}{1000} = \frac{7913}{1000}$$

haben wir die einfachere Bezeichnung

$$\begin{array}{r} 7,85 \\ 0,063 \\ \hline 7,913 \end{array}$$

statt

$$\frac{89745}{1000} - \frac{64}{10} = \frac{89745 - 6400}{1000} = \frac{83345}{1000}$$

haben wir in einfacheren Zeichen

$$\begin{array}{r} 89,745 \\ -\ 6,4 \\ \hline 83,345 \end{array}$$

statt

$$\frac{589}{100} \times \frac{48}{1000} = \frac{589 \times 48}{100 \times 1000} = \frac{28272}{100000}$$

in einfacheren Zeichen

$$\begin{array}{r} 5{,}89 \\ 0{,}048 \\ \hline 4712 \\ 2356 \\ \hline 0{,}28272 \end{array}$$

wo die Anzahl der Stellen zur Rechten des Striches in den beiden Factoren die Anzahl der Stellen zur Rechten des Striches im Producte bestimmt.

statt

$$\frac{9634}{1000} : \frac{24}{10} = \frac{9634}{1000} : \frac{2400}{1000} = \frac{9634}{2400}$$

in einfacheren Zeichen

$$\frac{9{,}634}{2{,}4} = \frac{9{,}634}{2{,}400} = \frac{9634}{2400}$$

und eben so

$$\frac{0{,}89}{4{,}5375} = \frac{0{,}8900}{4{,}5375} = \frac{8900}{45375}$$

$$\frac{0{,}00089}{0{,}064} = \frac{0{,}00089}{0{,}06400} = \frac{89}{6400}$$

§. 41.

Diese Bezeichnung kann nur statt finden, wenn durch 10, 100, 1000, ... gemessen wird. Wir können aber, wenn durch eine andere Zahl getheilt wird,

$$\frac{7}{5}, \frac{19}{25}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots\ldots$$

durch eine neue Theilung die erforderliche Eigenschaft herbeiführen; wir zerlegen

bei $\frac{7}{5}$ jeden 5ten Theil in 2 Theile

$\frac{19}{25}$ . . 25 4

$\frac{3}{4}$ . . 4 25

$\frac{7}{8}$ . . 8 125

und erhalten

$$\frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{14}{10} = 1{,}4$$

$$\frac{19}{25} = \frac{4 \cdot 19}{4 \cdot 25} = \frac{76}{100} = 0{,}76$$

$$\frac{3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{25 \cdot 4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

$$\frac{7}{8} = \frac{125 \cdot 7}{125 \cdot 8} = \frac{875}{1000} = 0{,}875$$

Diese Zahlen, welche angeben, in wie viele Theile die vorgegebenen Theile zu zerlegen sind, ergeben sich, wenn

10 durch 5
100 25
100 4
1000 8

gemessen werden.

Der Zähler des neuen Bruchs entsteht also, wenn, wie im letzten Falle, die Zahl 1000 durch 8 gemessen und dann durch 7 vervielfacht wird, oder in Zeichen

$$\frac{1000}{8} \times 7 = 125 \times 7 = 875$$

Wählen wir aber eine andere Ordnung der Geschäfte, und vervielfachen zuerst und messen zuletzt,

$$\frac{1000 \times 7}{8} = \frac{7000}{8} = 875$$

so haben wir den Sinn der bekannten Vorschrift:

Man lasse hinter dem Zähler Nullen folgen, und theile durch den Nenner.

Es ist nicht nöthig, den neuen Nenner durch Vervielfachen von 8 mit 125 zu bilden, weil die Zahl 125 aus dem Messen von 1000 mit 8 hervorgegangen ist.

Die Geschäfte, welche wir auszuführen haben, sind daher folgende: den Zähler 7 mit 1000 vervielfachen, durch den Nenner 8 messen, und dann durch 1000 messen, oder in Zeichen

$$\frac{\frac{7 \times 1000}{8}}{1000} = \frac{\frac{7000}{8}}{1000} = \frac{875}{1000} = 0{,}875$$

§. 42.

Die ganze Auflösung besteht nach diesem in einem Vervielfachen mit einer Zahl, die aus 1 und aus Nullen besteht, und in dem Wiederaufheben dieses Vervielfachens oder in dem Messen mit derselben Zahl.

Obgleich nicht bekannt ist, ob durch 10 oder 100, oder 1000, . . . vervielfacht, und hernächst gemessen werden muß, so wird, da das Vervielfachen nur in einem Anreihen der Nullen besteht, das Messen schon den Bedarf der Nullen bestimmen. Z. B.

$$\frac{17}{32} = \frac{\frac{17}{32} \times 10\ldots}{10\ldots} = \frac{\frac{170\ldots}{32}}{10\ldots} = \frac{53125}{100000} = 0{,}53125$$

§. 43.

In den meisten Fällen besteht die Zahl, mit welcher vervielfacht und gemessen wird, aus 1 und aus unendlich vielen Nullen, z. B.

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3} \times 10 \ldots}{10 \ldots\ldots} = \frac{\frac{20 \ldots}{3}}{10 \ldots\ldots} = \frac{6666 \ldots\ldots}{10000 \ldots\ldots}$$

Hier erhalten wir einen Bruch, dessen Zähler und dessen Nenner aus unendlich vielen Ziffern besteht. Dieser Bruch, in seine Bestandtheile aufgelöst gibt eine ins Unendliche fortgehende Reihe

$$0 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots\ldots = 0{,}666 \ldots\ldots$$

deren Glieder das Gesetz befolgen, welches durch das Messen der Zahl 200 . . . . durch 3 bestimmt wird.

Eben so ist

$$\frac{7}{9} = \frac{\frac{7}{9} \times 10 \ldots}{10 \ldots\ldots} = \frac{\frac{70 \ldots}{9}}{10 \ldots} = \frac{777 \ldots\ldots}{1000 \ldots\ldots}$$

$$= 0 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots\ldots = 0{,}777 \ldots$$

$$\frac{8}{11} = \frac{\frac{8}{11} \times 10 \ldots\ldots}{10 \ldots\ldots} = \frac{727272 \ldots\ldots}{1000000 \ldots\ldots}$$

$$= 0 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{2}{10000} + \ldots = 0{,}7272 \ldots$$

$$\frac{5}{7} = \frac{\frac{5}{7} \times 10 \ldots}{10 \ldots} = \frac{\frac{50 \ldots}{7}}{10 \ldots} = \frac{714285714285 \ldots}{1000000000000 \ldots}$$

$$= 0 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots\ldots = 0{,}714285 \ldots$$

wo die Ziffern periodisch wieder zurückkehren. Es besteht nämlich die Periode

bei $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$ nur aus einer Ziffer, bei jenem 6 und bei diesem 7

bei $\frac{8}{11}$ aus den beiden Ziffern 72

bei $\frac{5}{7}$ aus den sechs Ziffern 714285

Diese unendliche Reihen sind den Brüchen $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{7}$ vollkommen gleich, sie sind entstanden durch ein Geschäft, welches nie aufhört. Wo diese Brüche vorkommen, können diese unendliche Reihen, und statt dieser unendlichen Reihen jene Brüche gesetzt, aber nicht statt der Brüche einige Glieder der Reihen oder statt dieser jene Brüche gesetzt werden.

Es verdient dies alle Aufmerksamkeit desjenigen, der tiefer mit der Wissenschaft sich befassen will. Mit diesen unendlichen Reihen lassen sich eben so strenge Beweise führen, als mit den geschlossenen Zahlen $\frac{2}{3}$, ... , deren Stelle sie vertreten, aber nicht mit den verstümmelten Wahrheiten, hervorgehend aus einer Betrachtungsweise, die dem großartigen Geschäftsmanne, der Kleines nicht achtet, wohl ansteht, aber nicht dem strengen Forscher in der Wissenschaft.

Zweiter besonderer Fall des Messens.

Gleiche Meßbarkeit.

§. 44.

Sind die Zahlen 5 und 3 in den Zahlen 20 und 12 gleich oft enthalten, so kündigen wir dieses an durch die Zeichen

$$\frac{20}{5} = \frac{12}{3}$$

oder

$$20 : 5 = 12 : 3$$

§. 45.

Die Zahlen und Maaße durch Zu- und Abzählen verbunden.

Die Idendität der Zahl, welche durch das zweimalige Messen hervorgebracht wird, ist der Grundgedanke, von welchem wir ausgehen und auch immer ausgehen müssen. Zuerst beschäftigen wir uns mit dem Messen der vorgeschriebenen Zahlen, wenn die Zahlen und auch die Maaße durch Zu- und Abzählen verbunden sind.

1) Wird das Maaß 5 zu der Zahl 20 und das Maaß 3 zu der Zahl 12 einmal zugezählt, so sind die Maaße einmal mehr als vorhin, also auch wieder gleich oft enthalten, oder in Zeichen

$$\frac{20 + 5}{5} = \frac{12 + 3}{3}$$

2) Werden diese Maaße einmal abgezählt, so sind sie einmal weniger als vorhin, also auch wieder gleich oft enthalten; in Zeichen

$$\frac{20 - 5}{5} = \frac{12 - 3}{3}$$

3) Wird 5 von 20 und zugleich 3 von 12 so oft abgezählt, als möglich ist, so werden beide Zahlen 20 und 12 zu gleicher Zeit erschöpft. Die Maaße 5 und 3 vereint sind also in den vereinten Zahlen 20 und 12 so oft enthalten, als 5 in 20 oder als 3 in 12 enthalten ist; oder in Zeichen

$$\frac{20 + 12}{5 + 3} = \frac{20}{5} = \frac{12}{3}$$

4) Wir zerlegen die Zahl 20 in 12 und 8 und das Maaß 5 in 3 und 2, oder in Zeichen

$$20 = 12 + 8$$
$$5 = 3 + 2$$

Da nun die beiden Theile 3 + 2 von den beiden Theilen 12 + 8 so oft abgezählt werden können als der erste Theil 3 vom ersten Theile 12, so wird auch der zweite Theil 8 durch den zweiten Theil 2 zu gleicher Zeit erschöpft als der erste Theil 12 durch den ersten Theil 3, oder

$$\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$$

oder

$$\frac{20 - 12}{5 - 3} = \frac{20}{5} = \frac{12}{3}$$

§. 46.

Das Resultat dieser Untersuchung ist:

Die gleiche Meßbarkeit wird weder durch das Zu- oder Abzählen der Maaße zu und von den Zahlen, noch durch das Zu- oder Abzählen sowohl der Zahlen als auch der Maaße gestört; oder in Zeichen

Wenn $$\frac{20}{5} = \frac{12}{3}$$

so ist auch

$$\frac{20 \pm 5}{5} = \frac{12 \pm 3}{3}$$

und

$$\frac{20 \pm 12}{5 \pm 3} = \frac{20}{5} = \frac{12}{3}$$

§. 47.

Zweifache Messbarkeit.

1) Wir gehen wieder von der Idenditát der Zahl aus, welche durch das zweimalige Messen hervorgebracht wird. Wir heben das Messen mit dem Maaße 5 auf, und ersetzen dieses Messen wieder durch das Messen mit der Zahl 12, oder wir nehmen die erstere Zahl 5 mal

$$5 \times \frac{20}{5} = 5 \times \frac{12}{3}$$

oder

$$20 = 5 \times \frac{12}{3}$$

und messen die vorliegende Zahl durch 12, und finden

$$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Werden also zwei Zahlen durch zwei Maaße gleich oft gemessen, so messen sich auch die Zahlen unter sich selbst eben so oft als die Maaße unter sich, oder es findet immer eine doppelte gleiche Meßbarkeit statt, oder

$$\frac{20}{5} = \frac{12}{3} \text{ und } \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

...mmen immer zugleich vor.

2) Von dieser zweiten gleichen Meßbarkeit, wo 20 und 5 die Zahlen und 12 und 3 die Maaße sind, gilt nun dasselbe, was oben in §. 46 von der ersteren gefunden ist, nämlich daß sie durch Zu- und Abzählen der Zahlen und Maaße nicht gestört wird, oder in Zeichen

$$\frac{20 \pm 12}{12} = \frac{5 \pm 3}{3}$$

und

$$\frac{20 \pm 5}{12 \pm 3} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

§. 48.

Gleiche Messbarkeit und Gleichheit der Producte.

1) Wir kehren zum letztenmale zu der Idendität der durch das zweimalige Messen hervorgebrachten Zahl zurück, um das Messen ganz aufzuheben, ohne dieses durch ein anderes Messen wieder zu ersetzen. Wir nehmen deshalb diese Zahl, welche durch das Messen entsteht, 5 und dann 3 mal oder 5 . 3 mal.

$$5 . 3 \times \frac{20}{5} = 5 . 3 \times \frac{12}{3}$$

und erhalten gleiche Producte

$$3 \times 20 = 5 \times 12$$

Wo also gleiche Meßbarkeit ist, bilden die Zahlen mit ihren nicht zugehörigen Maaßen gleiche Producte.

2) Mit derselben Leichtigkeit, mit welcher wir das Messen aufgehoben haben, können wir das Messen wieder herstellen. Wir messen nämlich die Zahl, welche durch das zweimalige Vervielfachen

$$3 \times 20 = 5 \times 12$$

entsteht, durch 5 und durch 3 oder durch 5 . 3

$$\frac{3 \times 20}{5 \times 3} = \frac{5 \times 12}{5 \times 3}$$

und erhalten wieder die gleiche Meßbarkeit

$$\frac{20}{5} = \frac{12}{3}$$

§. 49.

Die gefundenen Wahrheiten durch Buchstaben dargestellt.

Die Wahrheiten, welche durch diese Betrachtungen gewonnen sind, können wir in folgenden Zeichen niederlegen: Ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

so ist auch

1) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2) $a \times d = c \times b$

3) $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

4) $\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

5) $\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}$

6) $\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

§. 50.

Erweiterung einiger Wahrheiten.

Wenn mehrere Zahlen A, B, C, D, . . . durch andere a, b, c, d, . . . gleich oft gemessen werden, oder wenn

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = \frac{E}{e} = \ldots.$$

so finden wir durch Wiederholung der Gründe, die in §. 45 No. 3 erwähnt wurden, daß

$$\frac{A + B + C + D + E + \ldots}{a + b + c + d + e + \ldots} = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \ldots.$$

§. 51.

Dieser Wahrheit können wir eine größere Allgemeinheit geben, wenn wir von der gegebenen Meßbarkeit

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{c} = \frac{D}{d} = \ldots$$

zuerst zu folgender übergehen

$$\frac{\alpha \,.\, A}{\alpha \,.\, a} = \frac{\beta \,.\, B}{\beta \,.\, b} = \frac{\gamma \,.\, C}{\gamma \,.\, c} = \frac{\delta \,.\, D}{\delta \,.\, d} = \ldots.$$

und dann zu folgender

$$\frac{\alpha \,.\, A + \beta \,.\, B + \gamma \,.\, C + \delta \,.\, D + \ldots}{\alpha \,.\, a + \beta \,.\, b + \delta \,.\, c + \delta \,.\, d + \ldots} = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \ldots.$$

wo α, β, γ, δ, ... nach Willkür angenommen werden können.

Schluſs
der ersten allgemeinsten Unterſuchung
oder
die Gleichungen.

---

§. 52.

Aus der Unterſuchung über das Bilden der Zahlen durch Zu- und Abzählen, durch Vervielfachen und Meſſen geht hervor, daß eine und dieſelbe Zahl auf verſchiedene Weiſe hervorgebracht werden kann, entweder durch ein einzelnes Geſchäft z. B. 28 durch

$$17 + 11 = 37 - 9 = 4 \times 7 = \frac{84}{3} = 28$$

oder

$$a + b = c - d = f \times g = \frac{h}{k}$$

oder durch mehrere Geſchäfte

$$15 + 22 - 9 = 10 + 3 \times 6 = 48 - \frac{100}{5}$$

oder

$$a + b - c = d + g \, . \, h = k - \frac{m}{n}$$

Wir nennen ſowohl das Bilden einer beſtimmten Zahl durch ein oder durch mehrere Geſchäfte, als auch die verſchiedenen Bildungsweiſen einer und derſelben Zahl durch verſchiedene Geſchäfte Gleichung, und behalten das Zeichen =, welches wir bisher brauchten, um die Zahl, welche hervorgebracht wurde, von dem Geſchäfte, wodurch ſie hervorgebracht

wurde, zu trennen, auch dann bei, wenn wir verschiedene Bildungsweisen einer und derselben Zahl anzeigen wollen. Gleichung, also auch das Zeichen = für dieselbe, beziehet sich immer auf das, was hervorgebracht, und nie auf das, wie es hervorgebracht wird, oder immer auf den Gehalt und nie auf die Gestalt, in welcher eine Zahl erscheinen kann, nämlich ob als Summe oder als Unterschied, ob als Product oder als getrennter Factor, oder ob sie die Eigenschaft mehrerer von diesen annimmt.

Die bestimmte Bildungsweise aus einer oder aus mehreren Zahlen nennen wir Function. Z. B. $a + x \, . \, b$ ist eine Funktion von x; sie besteht in einem Vervielfachen und Zuzählen; diese Geschäfte bleiben, welcher Werth auch dem x gegeben werden mag, nämlich

$a + 1 \, . \, b, \quad a + 2 \, . \, b, \quad a + 3 \, . \, b, \quad a + 4 \, . \, b,$

Eben so ist $A + \frac{B}{x} - x \, . \, x \, . \, C$ eine Function von x, worin das Zu- und Abzählen, Vervielfachen und Messen unverändert bleiben, was auch immer x seyn mag; z. B.

$$A + \frac{B}{1} - 1 \, . \, 1 \, . \, C$$

$$A + \frac{B}{5} - 5 \, . \, 5 \, . \, C$$

$$A + \frac{B}{7} - 7 \, . \, 7 \, . \, C$$

u. s. w.

Wir können also von der Gleichung und von der Function sagen, daß jene den Gehalt und diese die Gestalt festhalte.

§. 53.

Kommt zu bestimmten Geschäften auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ein neues Geschäft, so muß entweder dasselbe Geschäft auch jenen auf der rechten Seite angereihet werden, oder es müssen auf der rechten Seite noch andere Geschäfte angezeigt werden, wodurch auf dieser Seite wieder dieselbe Zahl hervorgebracht wird, die auf der linken Seite durch das neu hinzugekommene Geschäft erzeugt wurde. Z. B. das Zu- und Abzählen der Zahlen

$$7 + 5 = 21 - 9$$

erzeugt dieselbe Zahl 12. Tritt zu dem Geschäfte auf der Linken noch das Abzählen der Zahl 8, so kann, um auf der rechten Seite dieselbe Zahl wieder zu erzeugen, dasselbe Geschäft auch auf der rechten Seite vorgenommen werden

$$7 + 5 - 8 = 21 - 9 - 8$$

oder auch dadurch, daß auf der rechten Seite ein anderes Geschäft ausgeführt wird, z. B.

$$7 + 5 - 8 = \frac{21 - 9}{3}$$

§. 54.

Wenn nun eine bestimmte Bildungsweise einer und derselben Zahl vorliegt, so kann durch das Aufheben der vorgeschriebenen Geschäfte diejenige Zahl wieder hergestellt werden, welche vor dem Anfange des Geschäfts vorhanden war. Z. B.

1) Hat 3 zu der Zahl x gezählt, 17 erzeugt

$$x + 3 = 17$$

so muß dieses Zuzählen wieder aufgehoben oder 3 von 17 wie-

der abgezählt werden, wenn die ursprüngliche Zahl x wieder hergestellt werden soll. Die Zeichen für diesen Gedanken sind

$$x = 17 - 3 = 14$$

2) Hat 4 von der Zahl x gezählt, 11 erzeugt,

$$x - 4 = 11$$

so muß dieses Abzählen wieder aufgehoben werden, wenn die ursprüngliche Zahl x wieder erscheinen soll

$$x = 11 + 4 = 15$$

3) Hat das Vervielfachen der Zahl x mit 5 die Zahl 20 hervorgebracht,

$$5x = 20$$

so wird die Zahl x wieder gewonnen, wenn dieses Vervielfachen wieder aufgehoben wird, oder in Zeichen

$$x = \frac{20}{5} = 4$$

4) Hat das Messen der Zahl x durch 6 die Zahl 7 erzeugt,

$$\frac{x}{6} = 7$$

so wird die Zahl x wieder hergestellt, wenn dieses Messen wieder aufgehoben wird, oder in Zeichen

$$x = 6 \cdot 7 = 42$$

5) Wenn mehrere Geschäfte ausgeführt sind, so kann immer durch das Aufheben derselben diejenige Zahl wieder hergestellt werden, von welcher der Auslauf genommen wurde. Z. B. es soll die Zahl hergestellt werden, welche mit 3 vervielfacht und durch 5 gemessen, und nachdem ferner hiezu 8 gezählt und 17 abgezählt wurde, die Zahl 6 hervorgebracht; in Zeichen

$$\frac{3x}{5} + 8 - 17 = 6$$

Wir heben das Abzählen auf, indem wir 17 zuzählen

$$\frac{3x}{5} + 8 = 6 + 17$$

heben das Zuzählen auf, indem wir 8 abzählen

$$\frac{3x}{5} = 6 + 17 - 8$$

heben das Messen auf, indem wir mit 5 vervielfachen

$$3x = 5(6 + 17 - 8)$$

und heben zuletzt das Vervielfachen auf, indem wir durch 3 messen

$$x = \frac{5(6 + 17 - 8)}{3} = 25$$

Statt nach und nach die angezeigten Geschäfte aufzuheben, wird der Geübte Vieles zu gleicher Zeit ausführen.

§. 55.

Dadurch, daß eine Zahl von allen übrigen durch das Aufheben der Geschäfte gesondert wird, kommen die übrigen Zahlen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, es ist daher bei einer Bildungsweise oder bei einer Gleichung nicht möglich, mehrere Zahlen, die der Bildungsweise zu Grunde liegen, zu sondern. Dieser Zweck kann nur dann erreicht werden, wenn zwei Bildungsweisen oder zwei Gleichungen gegeben sind, z. B.

$$4 . x + 6 . y = 76$$
$$3 . x + 5 . y = 61$$

wo x und y diejenigen Zahlen sind, die allein gestellt werden sollen.

Wenn x oder wenn y in beiden Gleichungen dieselben Vorzahlen hätten, so würde durch Abzählen der Gleichungen eine Gleichung hervorgebracht werden, worin sich nur eine von den beiden unbekannten Zahlen befinden würde. Obgleich diese Eigenschaft fehlt, so ist sie doch leicht herbei zu führen. Es wird

nämlich die erste mit 5 und die zweite mit 6, und dann wieder die erste mit 3 und die zweite mit 4 vervielfacht

$$20 \cdot x + 30 \cdot y = 380$$
$$18 \cdot x + 30 \cdot y = 366$$

und

$$12\,x + 18\,y = 228$$
$$12\,x + 20\,y = 244$$

Wird nun von der ersten die zweite und von der vierten die dritte Gleichung abgezählt, so entsteht

$$2\,x = 14 \quad \text{mithin} \quad x = 7$$
$$2\,y = 16 \qquad\qquad y = 8$$

§. 56.

Liegen drei Zahlen der Bildungsweise zu Grunde, so sind auch drei verschiedene Bildungsweisen oder drei Gleichungen nöthig, wenn jede von den übrigen gesondert dargestellt werden soll. Es seyen z. B.

$$2\,x + 3\,y + 4\,z = 20$$
$$5\,x + 6\,y + 9\,z = 44$$
$$7\,x + 8\,y + 10\,z = 53$$

die drei erforderlichen Gleichungen.

Wir vervielfachen die erste Gleichung mit 9 und die zweite mit 4, dann wieder die erste mit 5 und die dritte mit 2;

$$18\,x + 27\,y + 36\,z = 180$$
$$20\,x + 24\,y + 36\,z = 176$$

und

$$10\,x + 15\,y + 20\,z = 100$$
$$14\,x + 16\,y + 20\,z = 106$$

zählen jene und auch diese von einander ab

$$-2x + 3y = 4$$
$$4x + y = 6$$

vervielfachen wieder die ersten von diesen beiden Gleichungen mit 2 und die zweite mit 3

$$-4x + 6y = 8$$
$$4x + y = 6$$

und

$$-2x + 3y = 4$$
$$12x + 3y = 18$$

und zählen jene zu einander und diese von einander

$$7y = 14$$
$$14x = 14$$

und erhalten aus diesen beiden die Werthe von x und y

$$y = \frac{14}{7} = 2$$

$$x = \frac{14}{14} = 1$$

Werden nun diese beiden Werthe in eine der gegebenen Gleichungen z. B. in die erste von ihnen eingeführt

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4z = 20$$

so erhalten wir auch z

$$z = \frac{20 - 2 - 6}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

§. 57.

Dasselbe Verfahren, welches wir so eben bei zweien und bei dreien Gleichungen kennen gelernt haben, befolgen wir, wenn mehrere unbekannte Zahlen von denjenigen Zahlen getrennt werden sollen, mit welchen sie in Verbindung gegebene Zahlen erzeugten.

Allgemeinste Verbindungslehre.

Allgemeinste Verbindungslehre.

§. 58.

Die Vielheit und das Nebeneinanderseyn oder die Folge der Größen im Raume oder in der Zeit haben wir als diejenigen Gegenstände hingestellt, womit sich die Größenlehre beschäftigt. Nachdem wir von der Vielheit das Allgemeinste gesagt, gehen wir über zu dem Nebeneinanderseyn der Größen.

Nebeneinanderseyn, Folge, Stellung, Gruppirung, Verbindung sind hier gleichgültige Benennungen, und wir brauchen die eine oder die andere, je nachdem sie zur Verdeutlichung beitragen kann.

Da wir die Vielheit untersuchten, nannten wir die Größen Einheiten, jede Eins; in Rücksicht ihres Nebeneinanderseyns nennen wir die Größen Elemente.

Zuerst suchen wir alle mögliche Arten des Nebeneinanderseyns oder alle mögliche Verbindungen und trennen dann die verschiedenen Verbindungsweisen.

Alle mögliche Verbindungen.

§. 59.

Mehrere Elemente können einzeln erscheinen, und dann nennen wir sie Unionen

a , b , c , d

oder sie können zu zweien vorkommen

aa	ab	ac	ad
ba	bb	bc	bd
ca	cb	cc	cd
da	db	dc	dd

und nennen sie Binionen, und erhalten alle Binionen, wenn wir jedem Elemente das Element a, dann das Element b, dann c und zuletzt jedem das Element d vorsetzen.

Wir erhalten eben so alle mögliche Verbindungen zu dreien Elementen, wenn wir allen diesen Verbindungen zu zweien Elementen zuerst das Element a, dann das Element b, ferner das Element c und zuletzt das Element d vorsetzen.

aaa	aab	aac	aad
aba	abb	abc	abd
aca	acb	acc	acd
ada	adb	adc	add
baa	bab	bac	bad
bba	bbb	bbc	bbd
bca	bcb	bcc	bcd
bda	bdb	bdc	bdd

caa	cab	cac	cad
cba	cbb	cbc	cbd
cca	ccb	ccc	ccd
cda	cdb	cdc	cdd
daa	dab	dac	dad
dba	dbb	dbc	dbd
dca	dcb	dcc	dcd
dda	ddb	ddc	ddd

Setzen wir allen diesen Verbindungen nach und nach die Elemente a, b, c, d vor, so erhalten wir alle Verbindungen zu vier Elementen oder die Quaternionen. Eben so werden die Verbindungen zu fünf, sechs, ... Elementen gebildet.

Diese Verbindungen unterscheiden wir oft durch das Anfangselement, und wir sagen die Ternionen von der Ordnung a, nämlich alle Ternionen, die a im Anfange haben, und so auch die Ternionen von der Ordnung b, oder c, ... je nachdem b oder c das Anfangselement ist.

Die Anzahl dieser Verbindungen richtet sich nach der Anzahl der Elemente, welche in allen Verbindungen, und nach der Anzahl der Elemente, die in jeder Verbindung vorkommen. Bei 4 Elementen ist die Anzahl der

Binionen	4 . 4
Ternionen	4 . 4 . 4
Quaternionen	4 . 4 . 4 . 4

. . . .

und überhaupt bei n Elementen oder bei n Unionen sind

n . n Binionen
n . n . n Ternionen
n . n . n . n Quaternionen

möglich.

§. 60.

An diesen Verbindungen, die alle mögliche umfassen, können wir folgende Eigenschaften unterscheiden:

1) die Folge der Elemente,
2) das Wiederholen der Elemente,
3) den Werth einer Verbindung.

In Hinsicht der Folge der Elemente können wir unterscheiden:

α) Verbindungen, welche immer dieselben Elemente enthalten, aber alle mögliche Stellungen zulassen — oder die Versetzungen.

β) Verbindungen, in welchen nur höhere Elemente auf niedere Elemente folgen, oder welchen nie gestattet ist, daß höhere niedern Elementen vorhergehen — oder geordnete Verbindungen auch Combinationen genannt.

Das Wiederholen der Elemente ist nur eine Eigenschaft, welche keine Klasse für sich bestehend hervorbringt, und welche sich nur an die vorigen Eigenschaften anschließen oder nur Unterabtheilungen erzeugen kann.

Dasselbe gilt von der dritten Eigenschaft von dem Werthe der Verbindungen.

Nach dieser Würdigung der oben bemerkten Eigenschaften sind wir im Stande, folgende Verbindungsarten aufzuführen:

I. Versetzungen;

A. einfache Versetzungen,

α) ohne Wiederholungen,

β) mit Wiederholungen;

B. vielfache Versetzungen,

α) ohne Beschränkung,

α_1) ohne Wiederholungen,

α_2) mit Wiederholungen,

β) mit Beschränkung,

β_1) ohne Wiederholungen,

β_2) mit Wiederholungen;

II. geordnete Verbindungen,

A. ohne Wiederholungen,

B. mit Wiederholungen;

III. geordnete Verbindungen mit Versetzungen aber ohne Wiederholungen.

IV. Alle mögliche Verbindungen zu bestimmten Summen;

V. geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zur bestimmten Summe;

VI. geordnete Verbindungen mit Wiederholungen zur bestimmten Summe.

Die Abtheilung: geordnete Verbindungen mit Versetzungen und mit Wiederholungen, ist nicht aufgeführt, weil diese drei Eigenschaften alle mögliche Verbindungen wieder erzeugen.

Auch ist die Abtheilung: Versetzungen zur bestimmten Summe, unterdrückt, weil letztere Eigenschaft immer mit ersterer verbunden ist; da aber das Umgekehrte nicht immer statt findet, so muß die Summe oder der Werth der Verbindung als ein unterscheidendes Merkmal aufgenommen werden.

I. Versetzungen,

A. einfache Versetzungen,

α) ohne Wiederholungen oder Versetzungen an und für sich.

---

§. 61.

Kommt zu dem Elemente a das Element b, so kann dieses jenem folgen oder vorhergehen

a b
b a

Bei dreien Elementen a, b, c kann das Element a so oft im Anfange stehen, als sich die beiden anderen Elemente versetzen lassen; eben so oft b, so auch c, und wir erhalten drei Ordnungen:

abc	bac	cab
acb	bca	cba

wovon jede aus 2 oder aus 1 . 2 Verbindungen besteht, mithin erhalten wir 1 . 2 . 3 Verbindungen.

Sind vier Elemente gegeben, so entstehen vier Ordnungen:

abcd	bacd	cabd	dabc
»bdc	»adc	»adb	»acb
»cbd	»cad	»bad	»bac
»cdb	»cda	»bda	»bca
»dbc	»dac	»dab	»cab
»dcb	»dca	»dba	»cba

wovon jede aus so vielen Verbindungen besteht, als sich drei Elemente versetzen lassen, mithin

1 . 2 . 3 . 4 Versetzungen.

Eben so werden die Versetzungen aus 5 und aus mehreren Elementen gebildet; und

bei n Elementen entstehen n Ordnungen, und jede Ordnung aus so vielen Verbindungen, als sich n — 1 Elemente versetzen lassen, daher bei n Elementen

1 . 2 . 3 . . . . n Versetzungen.

§. 62.

Es kann auch folgendes Verfahren gewählt werden, z. B. bei dreien Elementen:

Das dritte hinzugekommene Element kann auf dem dritten, oder auf dem zweiten, oder auf dem ersten Platze stehen, und auf jedem Platze so oft stehen, als sich die beiden anderen Elemente versetzen lassen, nämlich c steht auf der

dritten	zweiten	ersten Stelle
a b c	a c b	c a b
b a c	b c a	c b a

Eben so bei vier Elementen steht das vierte Element auf der

vierten	dritten	zweiten	ersten Stelle
a b c d	a b d c	a d b c	d a b c
a c b »	a c » b	c » a b	» a c b
b a c »	b a » c	b » a c	» b a c
b c a »	b c » a	b » c a	» b c a
c a b »	c a » b	c » a b	» c a b
c b a »	c b » a	c » b a	» c b a

§. 63.

Die letzte Verbindung d c b a enthält die Elemente in der umgekehrten Ordnung, welche in der ersten a b c d vorgelegt

ist. Das ganze Geschäft kann also als ein allmähliges Umkehren der vorgelegten Ordnung angesehen werden. Gehen wir von diesem Gedanken aus, so haben wir nur immer die späteren Elemente zu erniedrigen und die früheren zu erhöhen.

Nach diesen kommen wir durch das Erniedrigen des c und durch das Erhöhen des b von der Verbindung abc zu der Verbindung acb.

Da sich b nicht mehr erniedrigen und c nicht mehr erhöhen läßt, so wird das frühere Element a erhöhet, worauf die beiden übrigen Elemente nach ihrer Rangordnung folgen, nämlich

bac

Wir erniedrigen das letzte und erhöhen das vorletzte Element, und erhalten die Verbindung

bca

Das frühere Element b wird erhöhet, worauf die beiden übrigen nach ihrer Rangordnung folgen

cab

und das letzte Element erniedrigt und das vorletzte erhöhet

cba

β) mit Wiederholungen.

§. 64.

Wenn ein oder wenn mehrere Elemente wiederholt werden sollen, oder wenn mehrere Elemente gleich sind

aab
aba
baa

so ist die letzte Verfahrungsweise in §. 63 vorzüglich zu berücksichtigen, bei welcher durch das Erniedrigen der letzteren und

durch das Erhöhen der früheren Elemente die vorgelegte Ordnung allmählig umgekehrt wird. Z. B.

aaabb
aabab
aabba
abaab
ababa
abbaa
baaab
baaba
babaa
bbaaa

§. 65.

Wir suchen die Anzahl aller möglichen Versetzungen aus n Elementen, unter welchen p Elemente gleich sind.

Wir gehen von einem bestimmten Falle aus

aaad

Wenn alle Elemente ungleich wären, so würden

1 . 2 . 3 . 4

Versetzungen, und die vier Colonnen entstehen, die in §. 62 gebildet sind. Da aber die Elemente a, b, c gleich sind, so vereinigen sich die Verbindungen in der ersten Colonne zu einer einzigen

aaad

jene in der zweiten zu aada
jene in der dritten zu adaa
und jene in der vierten zu daaa

Es entstehen also so vielmal weniger Versetzungen, als

aus dreien verschiedenen Elementen gebildet werden können, also nur

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \text{Versetzungen.}$$

Allgemein bei n verschiedenen Elementen würden

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots n$$

Versetzungen entstehen; da aber unter diesen Elementen p Elemente gleich sind, so entstehen so vielmal weniger als aus p verschiedenen Elementen gebildet werden können.

Die Anzahl der Versetzungen von n Elementen, worunter p Elemente gleich sind, ist also

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}$$

§. 66.

Wenn unter n Elementen p Elemente gleich und andere q Elemente gleich, allein nicht den vorigen gleich, sind, so entstehen wieder so vielmal weniger Verbindungen, als aus q verschiedenen Elementen gebildet werden können.

Die Anzahl der Versetzungen aus n Elementen, worunter p gleiche Elemente und wieder andere q gleiche Elemente sich befinden, ist also

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots \ldots \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots p \cdot 1 \cdot 2 \ldots q}$$

Eben so kommen wir zu der Anzahl der Versetzungen aus n Elementen, unter welchen p gleiche, q gleiche und s gleiche Elemente sich befinden, nämlich zu

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots p \cdot 1 \cdot 2 \ldots q \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}$$

Nach diesem ist die Anzahl der Versetzungen der Elemente

aaabbbbcccccccdfg

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$= 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$$

B. Vielfache Versetzungen,

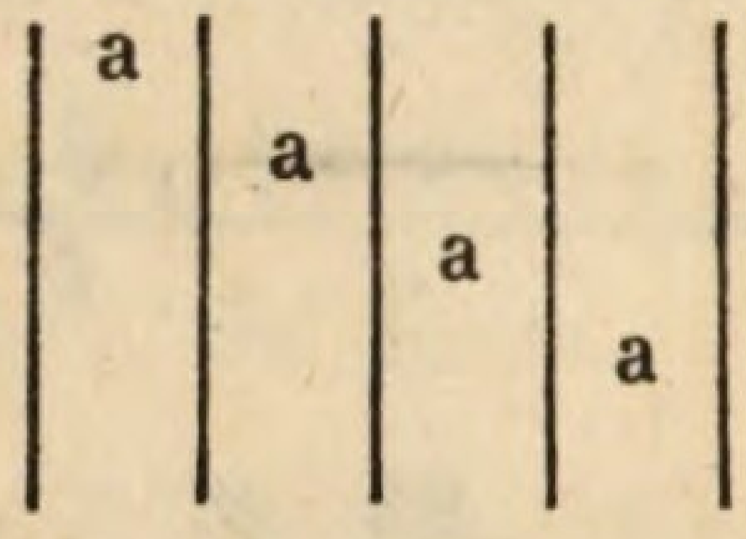
α) ohne Beschränkungen und

α_1) ohne Wiederholungen.

---

§. 67.

Ein Element kann an n Orten oder in n Abtheilungen als einzelnes Element erscheinen, als



die Anzahl der Fälle entspricht der Anzahl der Abtheilungen.

§. 68.

Zwei verschiedene Elemente a, b können an vier Orten oder in vier Abtheilungen zu einem oder auch zu zweien Elementen, aber beide immer zugleich, vorkommen

A				B				C	D
ab				ab				ab c c c	a b c c c
ba				a	b			a c b c c	a c b c c
	ab			a		b		a c c b c	a c c b c
	ba			a			b	a c c c b	a c c c b
		ab		ba				ba c c c	b a c c c
		ba		b	a			b c a c c	b c a c c
			ab	b		a		b c c a c	b c c a c
			ba	b			a	b c c c a	b c c c a
a	b				ab			c ab c c	c a b c c
b	a				a	b		c a c b c	c a c b c
a		b			a		b	c a c c b	c a c c b
b		a			ba			c ba c c	c b a c c
a			b		b	a		c b c a c	c b c a c
b			a		b		a	c b c c a	c b c c a
	a	b				ab		c c ab c	c c a b c
	b	a				a	b	c c a c b	c c a c b
	a		b			ba		c c ba c	c c b a c
	b		a			b	a	c c b c a	c c b c a
		a	b				ab	c c c ab	c c c a b
		b	a				ba	c c c ba	c c c b a

In A treten die Elemente ab vereint mit ihren Versetzungen, und dann einzeln oder gesondert auf.

In B sind diese Verbindungen gebildet, indem, bevor die Elemente versetzt wurden, die Elemente der vorigen Verbindung in die Abtheilungen zerstreuet sind.

In C werden die trennenden Scheitelstriche von einem neuen eingeführten Elemente c gebildet.

In D sind alle Elemente, die in C vorkommen, aneinander gerückt, und bilden hier alle Versetzungen der Elemente

abccc

Die vielfachen Versetzungen sind hierdurch auf die

einfachen Versetzungen mit Wiederholungen zurückgeführt, welches nicht zufällig, sondern in der Natur des Geschäfts gegründet ist; denn das Versetzen der Elemente abccc besteht darin, daß die beiden Elemente ab auf alle mögliche Weise zwischen und zur Seite der ccc zu einem und zu zweien Elementen zerstreuet werden.

Hieraus geht zugleich hervor, daß die Anzahl aller möglichen Zerstreuungen zweier verschiedener Elemente in vier Abtheilungen gleich ist der Anzahl aller möglichen Versetzungen von $2 + 4 - 1$ oder von 5 Elementen, worunter $4 - 1$ oder 3 Elemente gleich sind, also =

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 20$$

§. 69.

Eben so sind die vielfachen Versetzungen der drei Elemente abc an vier verschiedenen Orten gleich den einfachen Versetzungen mit Wiederholungen der sechs Elemente

abcddd

nämlich

abc	d	d	d	abcddd
ab	dc	d	d	abdcdd
ab	d	dc	d	abddcd
ab	d	d	dc	abdddc
acb	d	d	d	acbddd
ac	db	d	d	acdbdd
ac	d	db	d	acddbd
ac	d	d	db	acdddb
a	dbc	d	d	adbcdd
a	db	dc	d	adbdcd
a	db	d	dc	adbddc
a	dcb	d	d	adcbdd
a	dc	db	d	adcdbd

a	dc	d	db	adcddb
a	d	dbc	d	addbcd
a	d	db	dc	addbdc
a	d	dcb	d	addcbd
a	d	dc	db	addcdb
a	d	d	dbc	adddbc
a	d	d	dcb	adddcb
bac	d	d	d	bacddd
ba	dc	d	d	badcdd
ba	d	dc	d	baddcd
ba	d	d	dc	badddc
bca	d	d	d	bcaddd
bc	da	d	d	bcdadd
bc	d	da	d	bcddad
bc	d	d	da	bcddda
b	dac	d	d	bdacdd
b	da	dc	d	bdadcd
b	da	d	dc	bdaddc
b	dca	d	d	bdcadd
b	dc	da	d	bdcdad
b	dc	d	da	bdcdda
b	d	dac	d	bddacd
b	d	da	dc	bddadc
b	d	dca	d	bddcad
b	d	dc	da	bddcda
b	d	d	dac	bdddac
b	d	d	dca	bdddca
cab	d	d	d	cabddd
ca	db	d	d	cadbdd
ca	d	db	d	caddbd
ca	d	d	db	cadddb
cba	d	d	d	cbaddd
cb	da	d	d	cbdadd
cb	d	da	d	cbddad
cb	d	d	da	cbddda

c	dab	d	d	cdabdd
c	da	db	d	cdadbd
c	da	d	db	cdaddb
c	dba	d	d	cdbadd
c	db	da	d	cdbdad
c	db	d	da	cdbdda
c	d	dab	d	cddabd
c	d	da	db	cddadb
c	d	dba	d	cddbad
c	d	db	da	cddbda
c	d	d	dab	cdddab
c	d	d	dba	cdddba
	dabc	d	d	dabcdd
	dab	dc	d	dabdcd
	dab	d	dc	dabddc
	dacb	d	d	dacbdd
	. . . . .			. . . .
	. . . . .			. . . .

Die Anzahl aller möglichen Zerstreuungen von drei verschiedenen Elementen in vier Abtheilungen ist also gleich der Anzahl aller möglichen Versetzungen von 3 + 4 — 1 oder von 6 Elementen, worunter 3 Elemente gleich sind, also

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

§. 70.

Ueberhaupt die Anzahl aller möglichen Zerstreuungen von n verschiedenen Elementen in p Abtheilungen ist gleich der Anzahl aller möglichen Versetzungen von n + p — 1 Elementen, unter welchen p — 1 Elemente gleich sind, und ist

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \ldots (n + p - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \ldots \ldots (p - 1)}$$

α) ohne Beschränkungen

α_2) und mit Wiederholungen.

§. 71.

Die vielfachen Versetzungen der Elemente

aab

an vier Orten oder die Zerstreuungen dieser Elemente in vier Abtheilungen auf alle mögliche Weise können auf die einfachen Versetzungen der Elemente

aabccc

zurückgebracht werden, nämlich

aab	c	c	c	aabccc
aa	cb	c	c	aacbcc
aa	c	cb	c	aaccbc
aa	c	c	cb	aacccb
aba	c	c	c	abaccc
ab	ca	c	c	abcacc
ab	c	ca	c	abccac
ab	c	c	ca	abccca
a	cab	c	c	acabcc
a	ca	cb	c	acacbc
a	ca	c	cb	acaccb
a	cba	c	c	acbacc
a	cb	ca	c	acbcac
a	cb	c	ca	acbcca
a	c	cab	c	accabc
a	c	ca	cb	accacb
a	c	cba	c	accbac
a	c	cb	ca	accbca
a	c	c	cab	acccab
a	c	c	cba	acccba
baa	c	c	c	baaccc
ba	ca	c	c	bacacc
ba	c	ca	c	baccac

ba	c	c	ca	baccca
b	caa	c	c	bcaacc
b	ca	ca	c	bcacac
b	ca	c	ca	bcacca
b	c	caa	c	bccaac
b	c	ca	ca	bccaca
b	c	c	caa	bcccaa
	caab	c	c	caabcc
	caa	cb	c	caacbc
	caa	c	cb	caaccb
	caba	c	c	cabacc
	cab	ca	c	cabcac
	cab	c	ca	cabcca
	ca	cab	c	cacabc
	ca	ca	cb	cacacb
	ca	cba	c	cacbac
	ca	cb	ca	cacbca
	ca	c	cab	caccab
	ca	c	cba	caccba
	cbaa	c	c	cbaacc
	cba	ca	c	cbacac
	cba	c	ca	cbacca
	cb	caa	c	cbcaac
	cb	ca	ca	cbcaca
	cb	c	caa	cbccaa
	c	caab	c	ccaabc
	c	caa	cb	ccaacb
	c	caba	c	ccabac
	c	cab	ca	ccabca
	c	ca	cab	ccacab
	c	ca	cba	ccacba
	c	cbaa	c	ccbaac
	c	cba	ca	ccbaca
	c	cb	caa	ccbcaa
	c	c	caab	cccaab
	c	c	caba	cccaba
	c	c	cbaa	cccbaa

Die Anzahl dieser Zerstreuungen ist

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 60$$

§. 72.

Allgemein alle mögliche Zerstreuungen von n Elementen, unter welchen q gleiche Elemente sind, in p Abtheilungen können betrachtet werden als die Versetzungen von $n + p - 1$ Elementen, unter welchen q gleiche und $p - 1$ andere gleiche Elemente sich befinden; ihre Anzahl ist daher

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots \ldots (n + p - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p - 1)}$$

§. 73.

Ebenso ist die Anzahl aller möglichen Zerstreuungen von n Elementen, unter welchen q gleiche, m gleiche, s gleiche ..., Elemente sind, in p Abtheilungen ohne Beschränkung

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (n + p - 1)}{1 \cdot 2 \ldots q \times 1 \cdot 2 \ldots m \times 1 \cdot 2 \ldots s \times 1 \cdot 2 \ldots (p - 1)}$$

§. 74.

Die Anzahl aller möglichen Zerstreuungen von n gleichen Elementen in p Abtheilungen ohne Beschränkung ist nach §. 72

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \ldots (n + p - 1)}{1 \cdot 2 \ldots n \times 1 \cdot 2 \ldots (p - 1)}$$

oder

$$\frac{(n + 1)(n + 2) \ldots \ldots (n + p - 1)}{1 \cdot 2 \ldots \ldots \ldots \ldots (p - 1)}$$

oder

$$\frac{p\,(p + 1) \ldots \ldots \ldots (p + n - 1)}{1 \cdot 2 \ldots \ldots \ldots \ldots n}$$

β) mit der Beschränkung, dass in keiner Abtheilung mehr als ein Element erscheinen darf, und

β_1) ohne Wiederholungen.

§. 75.

Die beiden Elemente a b sollen in fünf Abtheilungen gebracht werden:

𝔄					𝔅	ℭ
a	b				abccc	ab c c c
a		b			acbcc	a cb c c
a			b		accbc	a c cb c
a				b	acccb	a c c cb
b	a				baccc	ba c c c
b		a			bcacc	b ca c c
b			a		bccac	b c ca c
b				a	bccca	b c c ca
	a	b			cabcc	cab c c
	a		b		cacbc	ca cb c
	a			b	caccb	ca c cb
	b	a			cbacc	cba c c
	b		a		cbcac	cb ca c
	b			a	cbcca	cb c ca
		a	b		ccabc	c cab c
		a		b	ccacb	c ca cb
		b	a		ccbac	c cba c
		b		a	ccbca	c cb ca
			a	b	cccab	c c cab
			b	a	cccba	c c cba

Die Zerstreuungen 𝔄 mit der Beschränkung werden eben so gebildet, als die Versetzungen der Elemente

abccc

wenn die leeren Stellen mit c ausgefüllt werden, so entstehen

diese Versetzungen in B, und werden die c c c unter einander gestellt, so entstehen die Zerstreuungen der beiden Elemente a, b in vier Abtheilungen ohne Beschränkung in C; ihre Anzahl ist also

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

§. 76.

Die Zerstreuungen der Elemente a, b, c in fünf Abtheilungen mit der Beschränkung werden eben so gebildet, als die Versetzungen der Elemente

a b c d d

denn sie entstehen aus ihnen, wenn die leeren Stellen mit d ausgefüllt werden, und diese geben, wenn die d, d untereinandergestellt werden, die Zerstreuungen der Elemente a b c in drei Abtheilungen ohne Beschränkung, nämlich

a	b	c			a b c d d	a b c	d	d
a	b		c		a b d c d	a b	d c	d
a	b			c	a b d d c	a b	d	d c
a	c	b			a c b d d	a c b	d	d
a	c		b		a c d b d	a c	d b	d
a	c			b	a c d d b	a c	d	d b
a		b	c		a d b c d	a	d b c	d
a		b		c	a d b d c	a	d b	d c
a		c	b		a d c b d	a	d c b	d
a		c		b	a d c d b	a	d c	d b
a			b	c	a d d b c	a	d	d b c
a			c	b	a d d c b	a	d	d c b
b	a	c			b a c d d	b a c	d	d
b	a		c		b a d c d	b a	d c	d
b	a			c	b a d d c	b a	d	d c
b	c	a			b c a d d	b c a	d	d

b	c		a		bcdad	bc	da	d
b	c			a	bcdda	bc	d	da
b		a	c		bdacd	b	dac	d
b		a		c	bdadc	b	da	dc
b		c	a		bdcad	b	dca	d
b		c		a	bdcda	b	dc	da
b			a	c	bddac	b	d	dac
b			c	a	bddca	b	d	dca
c	a	b			cabdd	cab	d	d
c	a		b		cadbd	ca	db	d
c	a			b	caddb	ca	d	db
c	b	a			cbadd	cba	d	d
c	b		a		cbdad	cb	da	d
c	b			a	cbdda	cb	d	da
c		a	b		cdabd	c	dab	d
c		a		b	cdadb	c	da	db
c		b	a		cdbad	c	dba	d
c		b		a	cdbda	c	db	da
c			a	b	cddab	c	d	dab
c			b	a	cddba	c	d	dba
	a	b	c		dabcd		dabc	d
	a	b		c	dabdc		dab	dc
	a	c	b		dacbd		dacb	d
	a	c		b	dacdb		dac	db
	a		b	c	dadbc		da	dbc
	a		c	b	dadcb		da	dcb
	b	a	c		dbacd		dbac	d
	b	a		c	dbadc		dba	dc
	b	c	a		dbcad		dbca	d
	b	c		a	dbcda		dbc	da
	b		a	c	dbdac		db	dac
	b		c	a	dbdca		db	dca
	c	a	b		dcabd		dcab	d
	c	a		b	dcadb		dca	db
	c	b	a		dcbad		dcba	d

c	b		a	dcbda	dcb	da
c		a	b	dcdab	dc	dab
c		b	a	dcdba	dc	dba
	a	b	c	ddabc	d	dabc
	a	c	b	ddacb	d	dacb
	b	a	c	ddbac	d	dbac
	b	c	a	ddbca	d	dbca
	c	a	b	ddcab	d	dcab
	c	b	a	ddcba	d	dcba

Die Anzahl dieser Zerstreuungen ist

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} = 60$$

§. 77.

Allgemein sollen n verschiedene Elemente in p Abtheilungen gebracht werden, so daß in keiner Abtheilung mehr als ein Element sich befindet, so gleichen diese Zerstreuungen den einfachen Versetzungen von p Elementen, unter welchen p — n Elemente gleich sind; ihre Anzahl ist daher

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, p}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\,.\, (p - n)}$$

β) mit der Beschränkung, dass in keiner Abtheilung mehr als ein Element erscheinen darf, und

β_2) mit Wiederholungen.

§. 78.

Sind die Elemente abb in fünf Abtheilungen zu bringen

a	b	b			abbcc	abb	c	c
a	b		b		abcbc	ab	cb	c
a	b			b	abccb	ab	c	cb
a		b	b		acbbc	a	cbb	c
a		b		b	acbcb	a	cb	cb
a			b	b	accbb	a	c	cbb
b	a	b			babcc	bab	c	c
b	a		b		bacbc	ba	cb	c
b	a			b	baccb	ba	c	cb
b	b	a			bbacc	bba	c	c
b	b		a		bbcac	bb	ca	c
b	b			a	bbcca	bb	c	ca
b		a	b		bcabc	b	cab	c
b		a		b	bcacb	b	ca	cb
.	.	.	.	.	. . .	. . .	. .	. .

so gleichen diese durch Ausfüllen der leeren Stellen mit cc den einfachen Versetzungen der Elemente

abccc

und wenn die cc unter einander gestellt werden, den Zerstreuungen der Elemente abb in dreien Abtheilungen ohne Beschränkung; ihre Anzahl ist daher

$$\frac{1.2.3.4.5}{1.1.2.1.2} = 30$$

§. 79.

Allgemein sind n Elemente, unter welchen q gleiche Elemente sind, in p Abtheilungen zu brin-

gen, so daß in keiner Abtheilung mehr als ein Element vorkommt, so gleichen diese Zerstreuungen den einfachen Versetzungen von p Elementen, unter welchen q gleiche und p — n andere gleiche Elemente sind; ihre Anzahl ist daher

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots p}{1 . 2 \ldots q \times 1 . 2 \ldots (p - n)}$$

§. 80.

Sind n Elemente, unter welchen q gleiche, m gleiche, s gleiche, ... Elemente sind, in p Abtheilungen zu bringen, so daß in keiner Abtheilung mehr als ein Element vorkommt, so ist ihre Anzahl

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p}{1 . 2 \ldots q \times 1 . 2 \ldots m \times 1 . 2 \ldots s \times 1 . 2 \ldots (p - n)}$$

§. 81.

Derjenige Fall, welcher besonders zu beachten ist, ist jener, worin alle Elemente gleich sind. Wir finden nach dem Obigen, daß die Anzahl aller möglichen Zerstreuungen von n gleichen Elementen in p Abtheilungen, so daß in keiner Abtheilung mehr als ein Element vorkommt,

$$= \frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots p}{1 . 2 \ldots n \times 1 . 2 \ldots (p - n)}$$

oder

$$= \frac{p (p - 1) (p - 2) \ldots\ldots (n + 1)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (p - n)}$$

oder

$$= \frac{p (p - 1) (p - 2) \ldots (p - n + 1)}{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}$$

II. Geordnete Verbindungen,

A) ohne Wiederholungen.

§. 82.

Da bei den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen kein späteres einem früheren Elemente vorhergehen, und kein Element mehrmalen vorkommen soll, so werden wir alle geordneten Verbindungen zu zweien oder alle Amben erhalten, wenn wir jedes Element nur mit allen folgenden Elementen verbinden

ab	bc	cd	df
ac	bd	cf	
ad	bf		
af			

und die Verbindungen zu dreien Elementen oder die Ternen, wenn wir allen Amben, welche ein höheres Element als a im Anfange haben, das Element a vorsetzen, allen, die ein höheres Element als b im Anfange haben, das Element b, und allen, welche ein höheres Element als c im Anfange haben, das Element c vorsetzen

abc	bcd	cdf
abd	bcf	
abf	bdf	
acd		
acf		
adf		

Wird die Rücksicht auf das Anfangselement nicht außer Acht gelassen, und allen Ternen, die mit einem höhern Ele-

mente als mit a anfangen, das Element a, und allen, die mit einem höheren Elemente als mit b anfangen, das Element b vorgesetzt, so entstehen die Quaternen

abcd	bcdf
abcf	
abdf	
acdf	

Und zuletzt wird nur jener Verbindung, die kein a im Anfange hat, das Element a vorgesetzt, so entsteht die einzige Quine

abcdf

§. 83.

Die erste Ambe ist ab, die letzte df. Um so viel a, um eben so viel ist b erhöhet, nämlich a zu d und b zu f. Eben so sind alle Elemente der ersten Terne abc in der letzten cdf um gleich viel erhöhet. Dasselbe gilt von den Elementen der ersten Quaterne abcd, die alle in der letzten bcdf um gleich viel erhöhet sind.

Nachdem wir diese Bemerkung vorausgeschickt, finden wir ferner, daß das Bilden dieser geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen in einem stufenweisen Erhöhen der Elemente bis zur äußersten Grenze besteht. So wird in der ersten Ambe ab das zweite Element b zu c, zu d, und f gesteigert.

ab , ac , ad , af

Die Elemente in der ersten Ambe ab werden zugleich erhöhet, wodurch bc, und das zweite Element bis zu f gesteigert, wodurch

bc , bd , bf

entstehen. In der ersten vorstehenden Ambe bc werden beide

Elemente um gleich viel erhöhet, wodurch cd entsteht, und dann das zweite Element d bis zu f gesteigert, nämlich

cd , cf

Zuletzt wird jedes Element der ersten Ambe cd erhöhet, wodurch die letzte Ambe entsteht, nämlich df.

Eben so verfahren wir bei den Ternen; in der ersten Terne abc werden die beiden letzten Elemente bc allmählig bis zu df gesteigert

abc , abd , abf , acd , acf , adf

dann alle Elemente der ersten Terne abc zugleich erhöht, wodurch bcd entsteht, und in dieser Terne die beiden letzten Elemente cd allmählig bis zu df gesteigert,

bcd , bcf , bdf

und zuletzt die Elemente in der ersten Terne bcd zugleich erhöht, wodurch cdf entsteht.

Dasselbe Verfahren wird bei den späteren Verbindungen befolgt.

§. 84.

Dieses allmählige erhöhen der Elemente ist nicht allein nützlich bei der Bildung dieser Verbindungen, es ist durch dasselbe zugleich der Uebergang zu einer neuen Betrachtungsweise gebahnt. Wir können nämlich das Bilden der Amben als ein Vertheilen der beiden gleichen Elemente aa in fünf Abtheilungen betrachten, wenn wir das Eintragen des a in die zweite Abtheilung als ein Erhöhen des a, das Eintragen des a in die dritte Abtheilung als ein nochmaliges Erhöhen, und überhaupt das Fortrücken zu folgender Abtheilung als ein neues Erhöhen des Elements ansehen, nämlich

ab	oder	a	a			
ac		a		a		
ad		a			a	
af		a				a
bc			a	a		
bd			a		a	
bf			a			a
cd				a	a	
cf				a		a
df					a	a

Eben so kann das Bilden der Ternen aus den Elementen

a , b , c , d , f , g , h

als ein Zerstreuen der drei gleichen Elemente aaa in sieben Abtheilungen betrachtet werden, so daß in einer Abtheilung nicht mehrere Elemente zu gleicher Zeit vorkommen:

abc	a	a	a				
abd	a	a		a			
abf	a	a			a		
abg	a	a				a	
abh	a	a					a
acd	a		a	a			
acf	a		a		a		
acg	a		a			a	
ach	a		a				a
adf	a			a	a		
adg	a			a		a	
adh	a			a			a
afg	a				a	a	
afh	a				a		a
agh	a					a	a
bcd		a	a	a			
bcf		a	a		a		
bcg		a	a			a	

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

bch	a	a				a
bdf	a		a	a		
bdg	a		a		a	
bdh	a		a			a
bfg	a			a	a	
bfh	a			a		a
bgh	a				a	a
cdf		a	a	a		
cdg		a	a		a	
cdh		a	a			a
cfg		a		a	a	
cfh		a		a		a
cgh		a			a	a
dfg			a	a	a	
dfh			a	a		a
dgh			a		a	a
fgh				a	a	a

Diese Betrachtungsweise ist die Grundlage zur Bestimmung der Menge der Verbindungen; sie zeigt unmittelbar, daß die Anzahl der Verbindungen zu dreien Elementen aus sieben Elementen

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.1.2.3.4} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$$

Ueberhaupt, die Anzahl aller geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu m Elementen ist gleich der Anzahl aller möglichen Zerstreuungen von m gleichen Elementen in n Abtheilungen, mit der Beschränkung, daß in einer Abtheilung nicht mehr als ein Element gesetzt werden darf, mithin nach §. 81

$$= \frac{1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{1.2.3 \ldots m.1.2 \ldots (n-m)}$$

oder

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}$$

B. Geordnete Verbindungen mit Wiederholungen.

§. 85.

Da Wiederholungen gestattet sind, so werden sich alle Verbindungen zu zweien Elementen oder alle Amben ergeben, wenn jedes Element nicht allein mit allen folgenden, wie früher, sondern auch mit sich selbst verbunden wird,

aa	bb	cc	dd
ab	bc	cd	
ac	bd		
ad			

und alle Verbindungen zu dreien Elementen oder alle Ternen, wenn allen Amben das Element a, allen Amben, mit b oder mit einem höheren Elemente anfangend, das Element b, allen Amben, mit c oder mit einem höheren Elemente anfangend, c, ... vorgesetzt wird

aaa	bbb	ccc	ddd
»ab	»bc	»cd	
»ac	»bd	»dd	
»ad	»cc		
»bb	»cd		
»bc	»dd		
»bd			
»cc			
»cd			
»dd			

Auf gleiche Weise werden aus diesen Ternen die Quaternen u. s. w. gebildet.

aaaa	bbbb	cccc	dddd
» aab	» bbc	» ccd	
» aac	» bbd	» cdd	
» aad	» bcc	» ddd	
» abb	» bcd		
» abc	» bdd		
» abd	» ccc		
» acc	» ccd		
» acd	» cdd		
» add	» ddd		
» bbb			
» bbc			
» bcc			
» bcd			
» bdd			
» ccc			
» ccd			
» cdd			
» ddd			

§. 86.

Hier haben wir wieder das allmählige Erhöhen der Elemente, im Allgemeinen dasselbe, wie bei der vorigen Verbindungsweise in §. 83, aber mit dem Unterschiede, daß, wenn in beiden die Elemente a, b, c, d zu Grunde gelegt werden, bei den Verbindungen in §. 83

die Elemente der ersten Ambe ab bis zu den Elementen cd

. . . . Terne abc . . . . bcd

bei diesen Verbindungen aber

die Elemente der ersten Ambe aa bis zu den Elementen dd
. . . . Terne aaa . . . . ddd
. . . .

allmählig erhöhet werden müssen.

Die Bildungsweise dieser Verbindungen kann also auch wieder als ein Vertheilen der Elemente aa, aaa, . . . in mehrere Abtheilungen betrachtet werden. Aber in Rücksicht der Verbindungen in §. 83 zeigt sich der Unterschied, daß, weil das Wiederholen eines Elements nicht gestattet war, also auch nicht mehrere Elemente in einer Abtheilung zugleich vorkommen konnten, hier aber, weil Wiederholungen gestattet sind, mehrere Elemente in einer Abtheilung zugleich vorkommen können. Nach diesem sind die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c zu zweien Elementen alle mögliche Zerstreuungen zweier Elemente aa in dreien Abtheilungen

aa	oder	aa		
ab		a	a	
ac		a		a
bb			aa	
bc			a	a
cc				aa

eben so sind die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d zu dreien Elementen, alle möglichen Zerstreuungen der drei gleichen Elemente aaa in vier Abtheilungen:

aaa	oder	aaa			
aab		aa	a		
aac		aa		a	
aad		aa			a
abb		a	aa		
abc		a	a	a	
abd		a	a		a
acc		a		aa	
acd		a		a	a
add		a			aa
bbb			aaa		
bbc			aa	a	
bbd			aa		a
bcc			a	aa	
bcd			a	a	a
bdd			a		aa
ccc				aaa	
ccd				aa	a
cdd				a	aa
ddd					aaa

Nach dieser Betrachtungsweise können wir die Anzahl dieser Verbindungen mit Leichtigkeit angeben, sie ist im vorstehenden Falle

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Allgemein, die Anzahl aller möglichen geordneten Verbindungen aus n Elementen zu m Elementen (betrachtet als alle möglichen Zerstreuungen von m gleichen Elementen in n Abtheilungen ohne Beschränkung) ist nach §. 74

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots, \ldots \ldots (n + m - 1)}{1 \cdot 2 \ldots (n - 1) \cdot 1 \cdot 2 \ldots \ldots m}$$

oder

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\ldots\,.\,m}$$

§. 87.

Bei den geordneten Verbindungen mit Wiederholungen findet noch eine andere Betrachtungsweise statt, wenn sie mit den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen verglichen werden. Sie entspringen aus diesen, wenn das Element auf der zweiten Stelle um eins, das Element auf der dritten Stelle um zwei, auf der vierten Stelle um drei, . . . erniedrigt wird; z. B.

abc	aaa
abd	aab
acd	abb
bcd	bbb
abcd	aaaa
abce	aaab
abcf	aaac
abde	aabb
abdf	aabc
abef	aacc
acde	abbb
acdf	abbc
acef	abcc
adef	accc
bcde	bbbb
bcdf	bbbc
bcef	bbcc
bdef	bccc
cdef	cccc

Dieses Höherstehen der Elemente in den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen auf der zweiten, dritten, ... Stelle, als der Elemente in den geordneten Verbindungen mit Wiederholungen, ist nicht zufällig, ist vielmehr in der Bildung beider Verbindungsarten gegründet.

Hieraus folgt zugleich, daß aus 3 Elementen a, b, c zu 4 Elementen eben so viele geordnete Verbindungen mit Wiederholuugen gebildet werden können, als aus 3 + 4 — 1 oder aus 6 Elementen a, b, c, d, e, f zu 4 Elementen geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen, und allgemein:

Aus n Elementen zu m Elementen können eben so viele geordnete Verbindungen mit Wiederholungen, als aus n + m — 1 Elementen zu m Elementen geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen, mithin

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,\ldots\,(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m}$$

geordnete Verbindungen mit Wiederholungen gebildet werden.

Diese zweite Betrachtungsweise führt also zu derselben Vorschrift wie die erste in §. 86. *)

---

*) Dieses Verfahren habe ich schon in meiner Analysis vom Jahr 1820 angewendet, um die Anzahl der geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus der Anzahl der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen herzuleiten.

III. Geordnete Verbindungen mit Versetzungen aber ohne Wiederholungen.

§. 88.

Diese Verbindungen sind alle mögliche Verbindungen, welche bestimmte Elemente eingehen können, wie in §. 59, aber mit Ausschluß jener, worin ein Element mehrmalen vorkommt. Bei ihrer Bildung können zwei Wege eingeschlagen werden.

Erstes Verfahren.

Wenn jedes Element mit allen früheren und allen späteren Elementen, nur nicht mit sich selbst, verbunden wird, so entstehen alle Verbindungen zu zweien Elementen

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Es entstehen also bei 4 Elementen 4 . 3 und bei n Elementen n . (n — 1) Verbindungen zu zweien Elementen.

Bei der Bildung der Verbindungen zu dreien Elementen wird jeder der vorliegenden Verbindungen dasjenige Element vorgesetzt, was der Verbindung noch fehlt, oder den Verbindungen zu zweien aus

den Elementen	b, c, d	das Element	a
	a, c, d		b
	a, b, d		c
	a, b, c		d

vorgesetzt; wir erhalten dadurch folgende Verbindungen:

abc	bac	cab	dab
» bd	» ad	» ad	» ac
» cb	» ca	» ba	» ba
» cd	» cd	» bd	» bc
» db	» da	» da	» ca
» dc	» dc	» db	» cb

Es entstehen vier Colonnen, wovon jede aus 3 . 2 Verbindungen besteht.

Bei n Elementen werden n Colonnen entstehen, wovon jede aus (n — 1) (n — 2) Verbindungen besteht. Die Anzahl aller Verbindungen aus n Elementen zu dreien Elementen ist also

$$n\,(n - 1)\,(n - 2)$$

Eben so wird verfahren bei der Bildung der Verbindungen zu vier Elementen. Den vorliegenden Verbindungen zu dreien Elementen aus

den Elementen	b, c, d	wird das Element	a
	a, c, d		b
	a, b, d		c
	a, b, c		d

vorgesetzt, und es entstehen die Verbindungen

abcd	bacd	cabd	dabc
» bdc	» adc	» adb	» acb
» cbd	» cad	» bad	» bac
» cdb	» cda	» bda	» bca
» dbc	» dac	» dab	» cab
» dcb	» dca	» dba	» cba

Bei n Elementen entstehen n Colonnen und jede aus

$$(n - 1)\ (n - 2)\ (n - 3)$$

Verbindungen; die Anzahl aller Verbindungen ist also

$$n\ (n - 1)\ (n - 2)\ (n - 3)$$

Allgemein bei n Elementen zu m Elementen entstehen n Colonnen und jede Colonne aus

$$(n - 1)\ (n - 2)\ .\ .\ .\ (n - m + 1)$$

Verbindungen. Es ist folglich

die Anzahl aller geordneten Verbindungen mit Versetzungen aber ohne Wiederholungen aus n Elementen zu m Elementen =

$$n\ (n - 1)\ (n - 2)\ .\ .\ .\ (n - m + 1)$$

§. 89.

Zweites Verfahren.

Es werden alle geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen gebildet, und dann diese geordneten Verbindungen auf alle mögliche Weise versetzt. Hiedurch entstehen aus a, b, c, d die Verbindungen zu zweien

ab	ba
ac	ca
ad	da
bc	cb
bd	db
cd	dc

die Verbindungen zu dreien

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

u. s. w. wo die erste Scheitelreihe die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen enthält, die in den Horizontalreihen auf alle mögliche Weise versetzt sind.

Da nun die Anzahl aller geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu m Elementen

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

ist, und da die Elemente jeder Verbindung

$$1.2.3\ldots m \text{ mal}$$

versetzt werden können, so ist das Product beider

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

die Anzahl aller geordneten Verbindungen mit Versetzungen aber ohne Wiederholungen aus n Elementen zu m Elementen.

IV. Alle mögliche Verbindungen zu bestimmten Summen.

§. 90.

Wird den Elementen ein bestimmter Werth beigelegt, und dieser durch Zahlen angegeben, so können entweder selbst die Zahlen statt der Elemente gesetzt, oder irgend ein Buchstabe kann auch mit Zahlen verbunden werden. Z. B. alle Verbindungen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, oder aus a_1, a_2, a_3, a_4 zu zweien Elementen sind

11	21	31	41
12	22	32	42
13	23	33	43
14	24	34	44

oder

$a_1\ a_1$	$a_2\ a_1$	$a_3\ a_1$	$a_4\ a_1$
$a_1\ a_2$	$a_2\ a_2$	$a_3\ a_2$	$a_4\ a_2$
$a_1\ a_3$	$a_2\ a_3$	$a_3\ a_3$	$a_4\ a_3$
$a_1\ a_4$	$a_2\ a_4$	$a_3\ a_4$	$a_4\ a_4$

Unter diesen gibt es Verbindungen, bei denen die Summe der Elemente oder auch die Summe der Stellenzahlen 2 ist

	11	$a_1\ a_1$
oder 3		
	12	$a_1\ a_2$
	21	$a_2\ a_1$
oder 4		
	13	$a_1\ a_3$
	22	$a_2\ a_2$
	31	$a_3\ a_1$

oder 5

14	$a_1\ a_4$
23	$a_2\ a_3$
32	$a_3\ a_2$
41	$a_4\ a_1$

oder 6

24	$a_2\ a_4$
33	$a_3\ a_3$
42	$a_4\ a_2$

oder 7

34	$a_3\ a_4$
43	$a_4\ a_3$

oder 8

44	$a_4\ a_4$

§. 91.

Sollen alle Verbindungen zu dreien Elementen zur Summe 4 oder 5 oder 6 aus den Elementen 1, 2, 3, ... gebildet werden, so sind die ersten Verbindungen

112 , 113 , 114

aus welchen durch das Erniedrigen der späteren und durch das Erhöhen der früheren Elemente alle übrigen Verbindungen abgeleitet werden, nämlich

112	113	114
121	122	123
211	131	132
	212	141
	221	213
	311	222
		231
		312
		321
		411

Sollen aber die Verbindungen aus den Elementen 0, 1, 2, 3, ... zu der Summe 4, 5, 6 gebildet werden, so entstehen folgende Verbindungen:

004	005	006
013	014	015
022	023	024
031	032	033
040	041	042
103	050	051
112	104	060
121	113	105
130	122	114
202	131	123
211	140	132
220	203	141
301	212	150
310	221	204
400	230	213
	302	222
	311	231
	320	240
	401	303
	410	312
	500	321
		u. s. w.

§. 92.

Die Bildungsweise dieser Verbindungen stimmt wieder vollkommen mit dem Zerstreuen gleicher Elemente in mehrere Abtheilungen überein; nämlich die Verbindungen zu dreien Elementen zur Summe 3 aus den Elementen 0, 1, 2, ... sind alle mögliche Zerstreuungen dreier Einheiten in drei Abtheilungen

003	oder	003			111
012		012		1	11
021		102	1		11
030		021		11	1
102		111	1	1	1
111		201	11		1
120		030		111	
201		120	1	11	
210		210	11	1	
300		300	111		

Die Anzahl der Verbindungen ist

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Die Verbindungen zu dreien Elementen zur Summe 4 aus den Elementen 0, 1, 2, ... sind die Zerstreuungen der vier Einheiten 1111 in drei Abtheilungen

400	1111		
310	111	1	
301	111		1
220	11	11	
211	11	1	1
202	11		11
130	1	111	
121	1	11	1
112	1	1	11
103	1		111
040		1111	
031		111	1
022		11	11
013		1	111
004			1111

Die Anzahl ist

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

Diese Betrachtungsweise führt unmittelbar zu der Anzahl der Verbindungen selbst; es sind nämlich die Verbindungen zu m Elementen zur Summe n aus den Elementen o, 1, 2, ... alle mögliche Zerstreuungen von n Einheiten (gleichen Elementen) in m Abtheilungen ohne Beschränkung, mithin ihre Anzahl nach §. 74

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}$$

§. 93.

Wird in den obigen Verbindungen jedes Element um 1 erhöhet, so gehen die Verbindungen aus den Elementen o, 1, 2, ... über in die Verbindungen aus den Elementen 1, 2, 3, ..., und umgekehrt letztere in erstere, wenn in diesen jedes Element um 1 erniedrigt wird. Die Anzahl der Verbindungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... zu m Elementen zur Summe n ist also gleich der Anzahl aller möglichen Verbindungen zu m Elementen zur Summe n — m aus den Elementen o, 1, 2, ... mithin

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\ldots\ldots(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-m)}$$

oder

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-1)}$$

§. 94.

Diese Verbindungen sind noch einer zweiten Betrachtungsweise fähig, als entspringend aus den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen.*) Werden nämlich den geordneten

*) Diese Betrachtungsweise habe ich zuerst in meiner Differenzen- und Differentialrechnung vom Jahr 1825 in 4° gelehrt, wo ich sie aber zu anderen Zwecken gebrauchte.

Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 zu dreien Elementen 0 und 6 zur Seite gesetzt

0 123 6	1113
0 124 6	1122
0 125 6	1131
0 134 6	1212
0 135 6	1221
0 145 6	1311
0 234 6	2112
0 235 6	2121
0 245 6	2211
0 345 6	3111

so sind 1, 1, 1, 3 die Abstände der benachbarten Elemente unter sich und von der zur Seite stehenden Zahlen 0 und 6, nämlich

$1 - 0 = 1,\ 2 - 1 = 1,\ 3 - 2 = 1,\ 6 - 3 = 3$

$1 - 0 = 1,\ 2 - 1 = 1,\ 4 - 2 = 2,\ 6 - 4 = 2$

$1 - 0 = 1,\ 2 - 1 = 1,\ 5 - 2 = 3,\ 6 - 5 = 1$

u. s. w.

Diese Abstände 1, 1, 1, 3 geben die Summe 6, die unverändert bleibt, wenn ein oder wenn mehrere Elemente der 6 näher rücken. Die Bildung der geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen kann angesehen werden, als ein allmähliges Fortrücken der 123 von 0 bis zu 6, so daß in der letzten Verbindung 345 der 6 eben so nahe stehen als 123 der 0 in der ersten Verbindung. Die Abstände in der letzten Verbindung müssen also in umgekehrter Ordnung 3111 aufeinander folgen, in welcher sie in der ersten sich darstellen.

Diese Abstände müssen daher alle Verbindungen zu vier Elementen zur Summe 6 hervorbringen.

Eben so geben, wenn den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu dreien Elementen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Zahlen 0 und 7 zur Seite gestellt werden, die Abstände 1, 1, 1, 4 der Elemente unter sich und ihre Abstände von den Zahlen 0 und 7 alle Verbindungen zu vier Elementen zur Summe 7

0 123 7	1114
0 124 7	1123
0 125 7	1132
0 126 7	1141
0 134 7	1213
0 135 7	1222
0 136 7	1231
0 145 7	1312
0 146 7	1321
0 156 7	1411
0 234 7	2113
0 235 7	2122
0 236 7	2131
0 245 7	2212
0 246 7	2221
0 256 7	2311
0 345 7	3112
0 346 7	3121
0 356 7	3211
0 456 7	4111

Allgemein, werden den geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, . . . , n — 1 zu m — 1 Elementen die Zahlen 0 und n zur Seite gestellt, so bilden die Abstände alle Verbindungen zu m Elementen zur

Summe n. Hieraus geht hervor, daß die Anzahl aller Verbindungen aus den Elementen 1, 2, 3, . . . zu m Elementen zur Summe n

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-1)}$$

Diese Betrachtungsweise führt also zu derselben Vorschrift, als die frühere in §. 93.

§. 95.

Dieselbe Betrachtungsweise kann auf die geordneten Verbindungen mit Wiederholungen ausgedehnt werden. Setzen wir nämlich den geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, 4 zu dreien Elementen die Zahlen 1 und 4 zur Seite, so entstehen die Verbindungen aus den Elementen 0, 1, 2, . . . zu vier Elementen zur Summe 3.

1 111 4	0003
1 112 4	0012
1 113 4	0021
1 114 4	0030
1 122 4	0102
1 123 4	0111
1 124 4	0120
1 133 4	0201
1 134 4	0210
1 144 4	0300
1 222 4	1002
1 223 4	1011
1 224 4	1020
1 233 4	1101
1 234 4	1110
1 244 4	1200
1 333 4	2001
1 334 4	2010
1 344 4	2100
1 444 4	3000

Allgemein werden den geordneten Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, ... n + 1 zu m — 1 Elementen die Zahlen 1 und n + 1 zur Seite gestellt, so bilden die Abstände alle Verbindungen aus den Elementen 0, 1, 2, ... zu m Elementen zur Summe n. Die Anzahl dieser Verbindungen ist also

$$\frac{(n+1)\,(n+2)\,...\,(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,...\,.\,(m-1)}$$

oder

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,...\,(m+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,........\,n}$$

welche Vorschrift auch durch die frühere Betrachtungsweise in §. 92 gefunden.

§. 96.

Bisher wurde kein Element, welches mitwirken konnte, um die bestimmte Summe hervorzubringen, ausgeschlossen. Sollen aber mehrere Elemente nicht vorkommen, so entstehen wenigere Verbindungen. Sollen z. B. aus den Elementen 1, 2, 3 alle Verbindungen zu vier Elementen zur Summe 8 gebildet werden, wo also 4 und 5 nicht vorkommen dürfen, so entstehen nur folgende Verbindungen:

1133
1223
1232
1313
1322
1331
2123
2132
2213

2222
2231
2312
2321
3113
3122
3131
3212
3221
3311

Die Anzahl dieser Verbindungen läßt sich auch angeben; allein der Zweck dieser Schrift gestattet nicht, die dazu erforderlichen Untersuchungen aufzunehmen.

§. 97.

Alle Verbindungen zu einem, zu zweien, zu dreien, ... Elementen, die eine bestimmte Summe geben, vereint, werden Zerfällungen einer Zahl genannt, z. B. die Zerfällungen von 2, 3, 4, 5, . . . sind

2	3	4	5
11	12	13	14
	21	22	23
	111	31	32
		112	41
		121	113
		211	122
		1111	131
			212
			221
			311
			1112
			1121
			1211
			2111
			11111

V. Geordnete Verbindungen ohne Wiederholungen zu bestimmten Summen.

§. 98.

Die geordneten Verbindungen ohne Wiederholungen zu zweien Elementen sind

zur Summe	3	4	5	6	7	8	9	10
	12	13	14	15	16	17	18	19
			23	24	25	26	27	28
					33	35	36	37
							45	46

zu dreien Elementen

zur Summe	6	7	8	9	10	11	12
	123	124	125	126	127	128	129
			134	135	136	137	138
				234	145	146	147
					235	236	156
						245	237
							246
							345

Sowohl bei diesen als bei der folgenden Verbindungsweise läßt sich zwar die Anzahl der Verbindungen angeben, aber der Zweck dieser Schrift gestattet nicht, diesen Gegenstand hier weiter zu verfolgen.

VI. Geordnete Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen.

§. 99.

Die Verbindungen zu zweien Elementen sind

zur Summe	2	3	4	5	6	7	8	9
	11	12	13	14	15	16	17	18
			22	23	24	25	26	27
					33	34	35	36
							44	45

zu dreien Elementen

zur Summe	3	4	5	6	7	8	9	10
	111	112	113	114	115	116	117	118
			122	123	124	125	126	127
				222	133	134	135	136
					223	224	144	145
						233	225	226
							234	235
							333	244
								334

zu vier Elementen

zur Summe	4	5	6	7	8	9	10
	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117
			1122	1123	1124	1125	1126
				1222	1133	1134	1135
					1223	1224	1225
					2222	1233	1234
						2223	1333
							2224
							2233

u. s. w.

§. 100.

Werden diese geordneten Verbindungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen mit ihren Versetzungszahlen vervielfacht, so entstehen alle möglichen Verbindungen zur bestimmten Summe, z. B. alle Verbindungen aus den Elementen a_1, a_2, a_3, ... zu vier Elementen zur Summe 12 sind

$$a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_9 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}$$

$$a_1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_8 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$a_1 \quad a_1 \quad a_3 \quad a_7 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$a_1 \quad a_1 \quad a_4 \quad a_6 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$a_1 \quad a_1 \quad a_5 \quad a_5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_7 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_6 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 1 . 1 . 1}$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_5 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 1 . 1 . 1}$$

$$a_1 \quad a_3 \quad a_3 \quad a_5 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 1 . 2 . 1}$$

$$a_1 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_4 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 1 . 1 . 2}$$

$$a_2 \quad a_2 \quad a_2 \quad a_6 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 2 . 3 . 1}$$

$$a_2 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_5 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 2 . 1 . 1}$$

$$a_2 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_4 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 2 . 1 . 2}$$

$$a_2 \quad a_3 \quad a_3 \quad a_4 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 1 . 2 . 1}$$

$$a_3 \quad a_3 \quad a_3 \quad a_3 \quad . \quad \frac{1 . 2 . 3 . 4}{1 . 2 . 3 . 4}$$

Durch dieses Verfahren wird das Bilden der Versetzungen, welches oft mühsam wird, sehr erleichtert.

Das
Wiederholen des Zuzählens.

Plan für die folgende Untersuchung.

§. 101.

Nachdem wir die allgemeine Untersuchung über die Vielheit der Elemente, wenn sie eins, und über die Gestalten beim Nebeneinanderseyn, wenn sie verschieden sind, geschlossen, nehmen wir die Geschäfte, für welche Gesetz und Freiheit gewonnen, wieder vor, aber nicht in ihrer Einzelheit, sondern in ihrer Vielheit. Wir wiederholen ein und dasselbe Geschäft mehrmalen, und zählen selbst die Geschäfte.

1) Wir wiederholen das Zuzählen.

2) . . . . Vervielfachen.

4) . . . . Abzählen.

5) . . . . Abzählen und Messen.

5) Wir wiederholen mehrere Geschäfte.

Diesen Wiederholungen eines und desselben Geschäfts unterlegen wir verschiedene Grundformen, und erhalten die verschiedenen Zweige der ganzen Wissenschaft, nämlich:

I. Das Wiederholen des Zuzählens,

A. die einfachen,

B. die höheren arithmetischen Reihen.

II. Das Wiederholen des Vervielfachens,

A. wenn die Factoren gleich sind — Potenzen,

B. wenn die Factoren verschieden sind, und die Form a + x b haben — einfache Facultäten,

C. wenn die Factoren die Form a + c . d^x haben — Exponentialfacultäten,

D. wenn die Factoren in zusammengesetzteren Formen erscheinen — höhere oder auch allgemeine Facultäten.

III. Das Wiederholen des Abzählens, Theorie der Unterschiede oder Differenzenrechnung.

VI. Das Wiederholen des Abzählens und Messens bei denselben Formen (Functionen) oder Differential- und Integralrechnung.

V. Das Wiederholen der Formen selbst — oder Wiederholende Functionen.

Aus dieser Uebersicht über die ganze Wissenschaft (obgleich nur wohl dem Kenner ganz verständlich) geht soviel hervor, daß jedem Zweige der Wissenschaft nur ein oder auch mehrere bestimmte Geschäfte zu Grunde liegen, welche ihm den Haupt-Charakter, oder das Allgemeine ertheilen, daß aber die Grundformen das Besondere geben.

Unser Zweck ist

das Wiederholen des Zuzählens

und

das Wiederholen des Vervielfachens

hier vorzutragen, da wir das Uebrige größtentheils in anderen Werken abgehandelt haben.

Anmerkung. Diese Idee, welche ich der Größenlehre im Allgemeinen unterlege, erscheint schon, obgleich in einem anderen Gewande, in der Vorrede zu meiner Differenzen- und Differentialrechnung (Heidelberg bei Winter 1825 in 4°).

Das Wiederholen des Zuzählens.

§. 102.

Durch das Wiederholen der Einheit ist die allgemeine Zahlenreihe entstanden

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n$$

worin jedes Glied die Wiederholungszahl selbst ist.

Durch das Zuzählen der Glieder dieser Reihe erhalten wir die Zahlen

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dieses Geschäft können wir durch andere Geschäfte ersetzen, wenn wir zuvor ein Vervielfachen dem Zuzählen vorhergehen lassen, und nach dem Zuzählen dieses Vervielfachen wieder aufheben. Wählen wir zu diesem eingeschobenen Vervielfachen die Zahl 2,

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} + \ldots + \frac{(n-1)2}{2} + \frac{n \cdot 2}{2}$$

so erhalten wir durch Zuzählen der beiden ersten Glieder

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{2\,(1+2)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

zu dieser Summe zählen wir das dritte Glied

$$\frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{3\,(2+2)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

das vierte

$$\frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{4\,(3+2)}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

das fünfte

$$\frac{4 \cdot 5}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2} = \frac{5\,(4+2)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

Durch dieses Zuzählen finden wir, daß die Summe der $n - 1$ ersten Glieder

$$= \frac{(n-1)\,n}{2}$$

und daß, wenn das $n$te Glied zugezählt wird, die Summe der n ersten Glieder

$$= \frac{(n-1)\,n}{2} + \frac{n \cdot 2}{2} = \frac{n\,(n-1+2)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Das Zuzählen der Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$$

kann also ersetzt werden durch das Vervielfachen und Messen der Zahlen

$$\frac{n\,(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Nach diesem ist

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 1$$

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$$

. . . .

§. 103.

Von den beiden Reihen

1	2	3	4	5	6	7	8	.	.	.
1	3	6	10	15	21	28	36	.	.	.

gibt die zweite die Summe der Glieder in der ersten Reihe an, und es ist durch diese der Gegenstand dargeboten, an welchem das wiederholende Zuzählen fortgesetzt werden kann.

Wir erhalten durch das Zuzählen der Glieder dieser Reihe folgende Summen:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 6 = 10$$

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

. . . .

Wollen wir hiebei den vorigen Weg wieder einschlagen, so haben wir statt der Glieder

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots$$

die Bildungsweise derselben

$$\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \ldots$$

beizubehalten, und um sie desto leichter vereinigen zu können, ein Vervielfachen mit 3 dem Zuzählen vorhergehen zu lassen, und dieses Vervielfachen erst nach dem Zuzählen wieder aufzuheben

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Nehmen wir das Zuzählen vor, so finden wir, daß das erste und zweite Glied sich vereinigen zu

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (1 + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

und das dritte Glied zu

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot (2 + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

das vierte zu

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot (3 + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Nach diesem lassen sich die $n - 1$ ersten Glieder vereinigen zu

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

und die n ersten Glieder zu

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{n\,(n+1)\,3}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{n(n+1)\,(n-1+3)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Das Zuzählen der n ersten Glieder der Reihe

$$1+3+6+10\,\ldots\ldots+\frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}$$

kann also ersetzt werden durch das Vervielfachen und Messen der Zahlen

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Wir finden nach dieser Vorschrift, daß

$$1=\frac{1\,.\,2\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}=1$$

$$1+3=\frac{2\,.\,3\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3}=4$$

$$1+3+6=\frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}=10$$

$$1+3+6+10=\frac{4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}=20$$

$$1+3+6+10+15=\frac{5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}=35$$

. . . .

§. 104.

Diese Summen geben eine neue Reihe

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + \ldots\ldots$$

deren Glieder wir durch Zuzählen vereinigen können. Wir behalten die Bildungsweise der Glieder bei

$$\frac{1.2.3}{1.2.3} + \frac{2.3.4}{1.2.3} + \frac{3.4.5}{1.2.3} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

lassen dem Zuzählen ein Vervielfachen mit 4 vorhergehen, und heben dieses erst nach dem Zuzählen wieder auf

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} + \frac{2.3.4.4}{1.2.3.4} + \frac{3.4.5.4}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)4}{1.2.3.4}$$

Die beiden ersten Glieder geben

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} + \frac{2.3.4.4}{1.2.3.4} = \frac{2.3.4.(1+4)}{1.2.3.4} = \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}$$

zu diesen das dritte gezählt

$$\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4} + \frac{3.4.5.4}{1.2.3.4} = \frac{3.4.5.(2+4)}{1.2.3.4} = \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}$$

das vierte

$$\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} + \frac{4.5.6.4}{1.2.3.4} = \frac{4.5.6.(3+4)}{1.2.3.4} = \frac{4.5.6.7}{1.2.3.4}$$

Ist die Summe der $n - 1$ ersten Glieder gefunden

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{1.2.3.4}$$

so ist die Summe der n ersten Glieder

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$= \frac{n(n+1)\,(n+2)\,(n-1+4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

Die Reihe

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + \ldots + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

läßt sich also ersetzen durch das Vervielfachen und Messen der Zahlen

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

Nach dieser Vorschrift finden wir

$$1 = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 1$$

$$1 + 4 = \frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 5$$

$$1 + 4 + 10 = \frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 15$$

$$1 + 4 + 10 + 20 = \frac{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 35$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 = \frac{5\,.\,6\,.\,7\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 70$$

. . . .

§. 105.

Diese Summen bilden wieder eine neue Reihe

$$1 + 5 + 15 + 35 + \ldots + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

für welche wir durch dasselbe Verfahren finden

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

§. 106.

Wir stellen zur Uebersicht des Ganzen die gefundenen Reihen zusammen

1	1	1	1	1	1	1	. . .
1	2	3	4	5	6	7	. . .
1	3	6	10	15	21	28	. . .
1	4	10	20	35	56	84	. . .
1	5	15	35	70	126	210	. . .
1	6	21	56	126	252	462	. . .
1	7	28	84	210	462	924	. . .
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	

Die Glieder der zweiten Reihe geben die Summe der entsprechenden Glieder der ersten Reihe an, die dritte Reihe die Summe der Glieder der zweiten Reihe, u. s. w., und es ist allgemein

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}$$

$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots\ldots$ oder

$$\frac{1\,.\,2}{1\,.\,2} + \frac{2\,.\,3}{1\,.\,2} + \frac{3\,.\,4}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$1 + 4 + 10 + 20 + \ldots\ldots$ oder

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{2\,.\,3\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$1 + 5 + 15 + 35 + \ldots$ oder

$$\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} + \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4} + \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3).(n+4)}{1.2.3.4.5}$$

$1 + 6 + 21 + 56 + \ldots$ oder

$$\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4.5} + \frac{2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1.2.3.4.5.6}$$

u. s. w.

Diese Reihen stehen in innigem Zusammenhange miteinander, die Glieder jeder folgenden Reihe entstehen aus der Summe der vorhergehenden Reihe, wenn in dieser Summe statt n die Zahlen

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

gesetzt werden; oder die **Summe** der vorhergehenden Reihe ist die **Form** für die Glieder der folgenden Reihe.

§. 107.

Das wiederholte Zuzählen der Zahl a zu der Zahl b erzeugt eine zusammengesetztere Reihe

$$\begin{array}{l} b \\ b + 1a \\ b + 2a \\ b + 3a \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ b + (n-1)a \end{array}$$

welche auf die frühere zurückgebracht werden kann. Da nämlich in jedem Gliede b vorkommt, so ist diese Zahl n mal vorhanden, und die Zahl a ist so oft in der ganzen Reihe als die Reihe

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{(n-1)\,n}{1 \,.\, 2}$$

angibt. Die Summe der ganzen Reihe ist also

$$n \,.\, b + \frac{n\,(n-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, a$$

§. 108.

Setzen wir dieser Summe noch die Zahl c zu, und betrachten

$$c + \frac{n}{1}\,b + \frac{n\,(n-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, a$$

als die Form für die Glieder einer folgenden Reihe, die entsteht, wenn in dieser Form statt n gesetzt wird,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.$$

so entsteht die Reihe

$$\begin{array}{l} c \\ c + 1b \\ c + 2b + 1a \\ c + 3b + 3a \\ c + 4b + 6a \\ c + 5b + 10a \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

$$c + \frac{n-1}{1}\,b + \frac{(n-1)\,(n-2)}{1 \,.\, 2}\,a$$

deren Summe nach dem §. 106 ist

$$n \,.\, c + \frac{n\,(n-1)}{1 \,.\, 2}\,b + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\,a$$

§. 109.

Wird dieser Summe die Zahl d zugesetzt, und

$$d + \frac{n}{1} \cdot c + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a$$

als die Form für die Glieder einer anderen Reihe angenommen, die hervorgebracht wird, wenn statt n die Zahlen

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

gesetzt werden, so entsteht die Reihe

$$\begin{array}{l} d \\ d + 1c \\ d + 2c + 1b \\ d + 3c + 3b + 1a \\ d + 4c + 6b + 4a \\ d + 5c + 10b + 10a \\ d + 6c + 15b + 20a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$d + \frac{n-1}{1} c + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} b + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a$$

und ihre Summe nach §. 106

$$nd + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} c + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a$$

§. 110.

Wird zu dieser Summe eine Zahl g gezählt, so entsteht die Form für die Glieder der folgenden Reihe, deren Summe eben so angegeben werden kann als die Summe der vorhergehenden Reihe, welches jetzt, nachdem die Ideen entwickelt sind, keinen Schwierigkeiten mehr unterworfen ist.

Das

Wiederholen des Vervielfachens.

Das wiederholende Vervielfachen.

§. 111.

Die ganze Untersuchung, in so weit der Zweck dieser Schrift sie hier zu verfolgen gestattet, zerfällt in folgende Abtheilungen und Unterabtheilungen:

I. Das Wiederholen des Vervielfachens oder die Bildung der Potenzenreihe;

A. wenn die Grundzahl einfach ist,

α) allgemein,

β) drei besondere Fälle;

B. wenn die Grundzahl zusammengesetzt ist, oder gebildet werden soll

α) durch Zuzählen,

β) . . . Abzählen,

γ) . . . Vervielfachen,

δ) . . . Messen.

II. Verbindung der Glieder der Reihe

A. durch Zuzählen,

B. . . . Abzählen,

C. . . . Vervielfachen,

D. . . . Messen.

III. Aus einem späteren Gliede die Grundzahl wieder aufsuchen,

A. wenn die Grundzahl eine geschlossene Zahl ist;

α) im Allgemeinen,

α_1) aus dem zweiten das erste Glied,

α_2) aus dem dritten und aus einem späteren das erste Glied.

β) besondere Fälle

β_1) aus einem Producte,

β_2) aus einem Bruche.

B. Wenn die Grundzahl keine geschlossene Zahl ist.

C. Das Zurückführen der Grundzahl einer bestimmten Zahl auf die Grundzahl einer niederen Zahl;

α) durch Zerlegen in Factoren,

β) Durch Hinzufügen eines Factors

D. Allgemeine Untersuchung über die Bildung der Haupt- und Zwischen-Glieder.

IV. Aus der Verbindung mehrerer Glieder das erste Glied wieder aufsuchen.

V. Jeder Zahl ihre Stelle in der Reihe anweisen.

I. Das wiederholende Vervielfachen.

A. Wenn die Grundzahl einfach ist,

α) allgemein.

---

§. 112.

Das Wiederholen des Vervielfachens der Zahl 7 mit 7 erzeugt eine Reihe

7	7 · 7	7 · 7 · 7	7 · 7 · 7 · 7	. . . .
7	49	343	2401	. . . .

deren Glieder Producte aus gleichen Factoren sind. Ist 8 die Grundzahl, so ist die Reihe

8	8 . 8	8 . 8 . 8	8 . 8 . 8 . 8	. . . .
8	64	512	4096	. . . .

worin die Glieder schneller wachsen.

§. 113.

Das Vervielfachen mit der Grundzahl führt vom vorhergehenden zum folgenden Gliede, also umgekehrt das Aufheben des Vervielfachens oder das Messen vom folgenden zum vorhergehenden Gliede wieder zurück. So gibt das dritte Glied 8 . 8 . 8 oder 512 durch 8 gemessen das zweite Glied 8 . 8 oder 64, dieses zweite durch 8 gemessen gibt das erste Glied 8. Wird mit diesem Messen fortgefahren, und das erste Glied 8 durch die Grundzahl 8 gemessen, so entsteht ein vorhergehendes Glied 1; dieses Glied wieder durch die Grundzahl 8 gemessen

erzeugt wieder ein vorhergehendes Glied $\frac{1}{8}$. Durch dieses fortgesetzte Vervielfachen und Messen entsteht also eine Reihe

$$\ldots, \frac{1}{8.8.8}, \frac{1}{8.8}, \frac{1}{8}, 1, 1.8, 1.8.8, 1.8.8.8, \ldots$$

$$\ldots, \frac{1}{512}, \frac{1}{64}, \frac{1}{8}, 1, 8, 64, 512, \ldots$$

worin jedes folgende Glied das 8fache des vorhergehenden Gliedes ist. Die Reihe selbst besteht aus zwei Zweigen, wovon jener zur Rechten dem unendlich Großen, und jener zur Linken dem unendlich Kleinen zueilt. In ihr befindet sich ein Mittelglied, welches unabhängig von der Grundzahl ist, und immer 1 ist. Alles dieses bestätigt sich, wenn eine andere Grundzahl gewählt wird.

$$\ldots, \frac{1}{7\cdot7\cdot7}, \frac{1}{7\cdot7}, \frac{1}{7}, 1, 1\cdot7, 1\cdot7\cdot7, 1\cdot7\cdot7\cdot7, \ldots$$

$$\ldots, \frac{1}{343}, \frac{1}{49}, \frac{1}{7}, 1, 7, 49, 343, \ldots$$

§. 114.

Der Grundgedanke ist das Vervielfachen und zwar das wiederholte Vervielfachen der 1 mit der Grundzahl, welches durch Punkte oder durch das Zeichen X angegeben wird. Statt dieses Zeichen mehrmalen zu wiederholen, kann dasselbe mit der Zahl, welche angibt, wie oft das Vervielfachen wiederholt werden soll, oder mit der Wiederholungszahl verbunden werden; z. B. 1 dreimal nacheinander mit 8 vervielfachen kann angekündigt werden durch

$$1 . 8 . 8 . 8 \quad \text{oder} \quad 1\,(\times)^3\,8 \quad \text{oder} \quad 1\,(.)^3\,8$$

Man ist allgemein übereingekommen, diese Wiederholungs-

zahl mit der Grundzahl zu verbinden, und die 1 selbst nicht niederzuschreiben, nämlich

$$8^{3}$$

Da diese Wiederholungszahl zugleich angibt, das wievielte Glied der Reihe gebildet werden soll, so tritt sie zugleich als Stellenzahl auf, und 8^{3} bedeutet das dritte Glied der Reihe, in welcher 8 das erste ist.

Das Erhöhen dieser Stellenzahl um 1 zeigt an, daß das Vervielfachen mit der Grundzahl noch einmal vorgenommen, und das Erniedrigen der Stellenzahl um 1 bedeutet, daß das Vervielfachen einmal aufgehoben werden soll. Nach diesem bedeutet

$8^{3-1} = \frac{1.8.8.8}{8} = 1.8.8 = 8^{2}$ das zweite Glied

$8^{2-1} = \frac{1.8.8}{8} = 1.8 = 8^{1}$ das erste Glied.

$8^{1-1} = \frac{1.8}{8} = 1 = 8^{0}$ das Mittelglied

$8^{0-1} = \frac{1}{8} = 8^{-1}$ das erste Glied auf der linken Seite

$8^{-1-1} = \frac{1}{8.8} = 8^{-2}$ das zweite Glied auf der linken Seite

. . . .

Wir haben also folgende Reihen:

$$\ldots,\quad 8^{-3},\quad 8^{-2},\quad 8^{-1},\quad 8^{0},\quad 8^{1},\quad 8^{2},\quad 8^{3},\ \ldots$$

$$\frac{1}{8.8.8}\quad \frac{1}{8.8}\quad \frac{1}{8}\quad 1\quad 1.8\quad 1.8.8\quad 1.8.8.8$$

$$\frac{1}{512}\quad \frac{1}{64}\quad \frac{1}{8}\quad 1\quad 8\quad 64\quad 512$$

Anmerkung. Statt der Terminologie: 8 auf der dritten Potenz, pflege ich zu sagen: 8 hoch 3, und so a^n, a hoch n.

§. 115.

Die erste Horizontalreihe zählt die Geschäfte, welche in der zweiten Horizontalreihe durch eben so viele Zeichen (Punkte) angegeben sind, die dritte Horizontalreihe enthält die Glieder selbst. Wir können auch sagen, die erste Reihe stellt die Aufgabe hin (nämlich, welches Glied gebildet werden soll), die zweite gibt die Auflösung, und die dritte das Resultat der Aufgabe.

§. 116.

Das Messen, wodurch die Glieder auf der linken Seite hervorgebracht werden, kann nach und nach oder auf einmal vorgenommen werden. Das erstere kann bemerkbarer gemacht werden durch die Zeichen

$$\frac{\frac{1}{8}}{8}$$

und letzteres durch

$$\frac{1}{64}$$

oder 1 gemessen durch das vollendete Product 8.8, welches das zweite Glied auf der rechten Seite ist. Das zweite Glied auf der linken Seite wird also auch gebildet, wenn 1 gemessen wird durch das zweite Glied auf der rechten Seite oder in Zeichen

$$8^{-2} = \frac{1}{8^2}$$

Eben so ist

$$8^{-3} = \frac{1}{8^3}$$

Hiedurch werden wir bei den Gliedern auf der linken Seite auf die schon vollendeten Glieder auf der rechten Seite (also bei späteren Arbeiten auf frühere Arbeiten) zurückgewiesen. Diesen Gegensatz können wir dadurch bemerklich machen, wenn wir sagen

$$8^{-2} = \frac{1}{8.8} = \frac{\frac{1}{8}}{8}$$

sey die unabhängige und

$$8^{-2} = \frac{1}{8^2}$$

sey die zurücklaufende Bildungsweise.

§. 117.

Wählen wir statt drr bestimmten Zeichen unbestimmte Zeichen und a als Grundzahl, so sind die oben angedeuteten Reihen

$$\ldots a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^{0},\ a^{1},\ a^{2},\ a^{3},\ \ldots$$

$$\frac{1}{a.a.a} \quad \frac{1}{a.a} \quad \frac{1}{a} \quad 1 \quad a \quad aa \quad aaa$$

$$\frac{1}{a^3} \quad \frac{1}{a^2} \quad \frac{1}{a^1}$$

Die Glieder der Reihe können, da die Grundzahl a nicht bekannt ist, nicht gebildet werden.

β) Drei besondere Fälle.

§. 118.

Es bieten sich uns hier drei bemerkenswerthe Fälle dar; der erste ist, wenn die Grundzahl 1 ist. In diesem Falle ist die Reihe, welche durch das wiederholende Vervielfachen hervorgebracht wird, folgende:

$$\ldots, 1^{-3}, 1^{-2}, 1^{-1}, 1^{0}, 1^{1}, 1^{2}, 1^{3}, \ldots$$

$$\frac{1}{1.1.1} \quad \frac{1}{1.1} \quad \frac{1}{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1.1 \quad 1.1.1$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

In diesem einzigen Falle sind alle Glieder gleich.

§. 119.

Der zweite Fall ist, wenn 0 die Grundzahl ist

$$\ldots, 0^{-3}, 0^{-2}, 0^{-1}, 0^{0}, 0^{1}, 0^{2}, 0^{3}, \ldots$$

$$\frac{1}{0.0.0} \quad \frac{1}{0.0} \quad \frac{1}{0} \quad 1 \quad 1.0 \quad 1.0.0 \quad 1.0.0.0$$

Die Glieder auf der rechten Seite verschwinden, das Mittelglied ist 1 oder

$$0^{0} = 1$$

Um die Glieder auf der linken Seite würdigen zu können, gehen wir von folgender Betrachtung aus: Messen wir 1 durch die Zahlen $4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots$ so entsteht eine Reihe

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\frac{1}{3}}, \frac{1}{\frac{1}{4}}, \ldots, \frac{1}{\frac{1}{1000}}, \ldots, \frac{1}{0}$$

oder

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4 \ldots 1000, \ldots$$

in welcher das Glied desto größer je kleiner das Maaß ist, wodurch gemessen wird. Es kann also $\frac{1}{0}$ betrachtet werden als eine Größe, welche durch ihr Wachsthum unserer Vorstellung entrückt wird. Wir nennen sie unendlich groß.

In der obigen Reihe ist also nur das Mittelglied $o^0 = 1$ eine darstellbare Größe, die übrigen Glieder sind entweder durch ihr Verschwinden oder durch ihr grenzenloses Wachsen nicht mehr darstellbar.

§. 120.

Der dritte vorzüglich zu bemerkende Fall ist, wenn die Grundzahl das Aufhebungszeichen — vor sich trägt, nämlich

$$(-a)^1, \quad (-a)^2, \quad (-a)^3, \quad (-a)^4, \ldots$$

$$-a, \quad +a^2, \quad -a^3, \quad +a^4, \ldots$$

In diesem Falle erscheinen alle Glieder mit einer ungeraden Stellenzahl mit dem Aufhebungszeichen —, hingegen die Glieder mit einer geraden Stellenzahl von diesem Zeichen befreiet.

B. Bildung der Reihe durch wiederholendes Vervielfachen, wenn die Grundzahl zusammengesetzt ist.

§. 121.

α) Durch Zuzählen.

Soll die Grundzahl durch Zuzählen der Zahlen $5 + 7$ gebildet werden, so sind die Zeichen für die Glieder, und die Glieder selbst, folgende:

$(5 + 7)^1$, $(5 + 7)^2$, $(5 + 7)^3$, $(5 + 7)^4$, ...

12^1	12^2	12^3	12^4
12	12 . 12	12 . 12 . 12	12 . 12 . 12 . 12
12	144	1728	20736

§. 122.

Die beiden Geschäfte, Zuzählen und Vervielfachen, können in willkührlicher Ordnung vorgenommen werden. Wir können also auch zuerst vervielfachen, und dann zuzählen. In diesem Falle haben wir, um das zweite Glied zu bilden, folgende Producte zuzuzählen:

$$(5 + 7)^2 = (5 + 7)(5 + 7) = 5^2 + 2 . 5 . 7 + 7^2$$
$$= 25 + 70 + 49 = 144$$

und um das dritte zu bilden, folgende Producte zuzuzählen:

$$(5 + 7)^3 = (5^2 + 2 . 5 . 7 + 7^2)(5 + 7)$$
$$= 5^3 + 3 . 5^2 . 7 + 3 . 5 . 7^2 + 7^3$$
$$= 125 + 525 + 735 + 343$$
$$= 1728$$

Zum vierten Gliede werden folgende Producte erfodert:

$$(5 + 7)^4 = (5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 7^2 + 7^3)\ (5 + 7)$$

$$= 5^4 + 4 \cdot 5^3 \cdot 7 + 6 \cdot 5^2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 5 \cdot 7^3 + 7^4$$

$$= 625 + 3500 + 7350 + 6860 + 2401$$

$$= 20736$$

u. s. w.

§. 123.

Wir haben hier also zwei Wege, um die Glieder der Reihe zu bilden, entweder erst zuzuzählen, und dann zu vervielfachen wie in §. 121, oder erst zu vervielfachen und dann zuzuzählen wie in §. 122.

Sind die Zahlen durch Buchstaben vorgestellt,

$$(a + b)^1 \quad , \quad (a + b)^2 \quad , \quad (a + b)^3 \ , \ \ldots\ldots$$

so kann keins der bezeichneten Geschäfte vorgenommen, und es kann nur durch Zeichen angegeben werden, welche Producte, wenn der zweite Weg eingeschlagen wird, gebildet und zugezählt werden müssen, nämlich

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5 \cdot a^4 b + 10 \cdot a^3 b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5$$

. . . .

und eben so, wenn die Grundzahl durch Zuzählen mehrerer Zahlen erzeugt werden soll,

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d$$

u. s. w.

β) Durch Abzählen.

§. 124.

Wird die Grundzahl gebildet durch abzählen der Zahl 5 von der Zahl 9, so ist die Reihe

$$(9 - 5)^1, \quad (9 - 5)^2, \quad (9 - 5)^3, \quad (9 - 5)^4, \ldots$$

$$4^1 \qquad 4^2 \qquad 4^3 \qquad 4^4$$

$$4 \qquad 16 \qquad 64 \qquad 256$$

§. 125.

Wollen wir nicht erst abzählen, und dann durch Vervielfachen die Glieder bilden, sondern das Vervielfachen zuerst vornehmen, so haben wir folgende Producte ab- und zuzuzählen:

$$(9 - 5)^2 = 9^2 - 2.9.5 + 5^2 = 81 - 90 + 25 = 16$$

$$(9 - 5)^3 = 9^3 - 3.9^2.5 + 3.9.5^2 - 5^3$$

$$= 729 - 1215 + 675 - 125$$

$$= 64$$

und wenn Buchstaben als Zeichen für die Zahlen gewählt werden

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 - 2ab - 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$(a - b - c)^3 = a^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 - b^3$$
$$- 3b^2c - 3bc^2 - c^3$$

§. 126.

γ) Durch Vervielfachen.

Wenn die Grundzahl durch Vervielfachen der Zahlen 5 und 7 gebildet werden soll, so ist die Reihe

$$(5 . 7)^1 \;, \quad (5 . 7)^2 \;. \quad (5 . 7)^3 \;, \quad (5 . 7)^4 \;, \ldots .$$

35^1	35^2	35^3	35^4
35	1225	42875	1500625

§. 127.

Wir haben vollkommene Freiheit bei der Gruppirung der Factoren, woraus das zweite und die folgenden Glieder bestehen,

$$5.7 \times 5.7 \;, \quad 5.7 \times 5.7 \times 5.7 \;, \quad 5.7 \times 5.7 \times 5.7 \times 5.7 \;, \ldots$$

Wählen wir folgende Gruppirung

$$5.5 \times 7.7 \;,\; 5.5.5 \times 7.7.7 \;,\; 5.5.5.5 \times 7.7.7.7 \;,\ldots$$

$$5^2 \times 7^2 \qquad 5^3 \times 7^3 \qquad 5^4 \times 7^4$$

so finden wir, daß die Glieder der Reihe

$$(5\,.\,7)^1 \;,\; (5\,.\,7)^2 \;,\; (5\,.\,7)^3 \;,\; \ldots\ldots$$

in welcher die Grundzahl durch Vervielfachen zusammengesetzt ist, auch gebildet werden können, wenn die entsprechenden Glieder der einfacheren Reihen

$$5^1 \;,\; 5^2 \;,\; 5^3 \;,\; 5^4 \;,\; \ldots$$

$$7^1 \;,\; 7^2 \;,\; 7^3 \;,\; 7^4 \;,\; \ldots$$

in welchen 5 und 7 die Grundzahlen sind, mit einander vervielfacht werden. Diese Bildungsweise können wir in folgenden Zeichen niederlegen:

$$(5\,.\,7)^2 = 5^2\,.\,7^2 = 25 \times 49 = 1225$$

$$(5\,.\,7)^3 = 5^3\,.\,7^3 = 125 \times 343 = 42875$$

$$(5\,.\,7)^4 = 5^4\,.\,7^4 = 625 \times 2401 = 1500625$$

. . . .

§. 128.

Wenn die Zahlen durch Buchstaben vorgestellt werden, so sind die Zeichen für diese beide Verfahrungsweisen folgende:

$$(a\,.\,b)^2 = a^2\,.\,b^2$$

$$(a \,.\, b)^3 = a^3 \,.\, b^3$$

. . . .

$$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$$

wo die Zeichen zur Linken bedeuten, daß zuerst das Product a . b, und dann durch Vervielfachen dieses Products das spätere Glied gebildet werden soll, die Zeichen zur Rechten aber angeben, daß erst die späteren Glieder zweier einfachen Reihen gebildet, und dann die entsprechenden Glieder dieser einfachen Reihen vervielfacht werden sollen.

§. 129.

Besteht die Grundzahl aus mehreren Factoren, so wird das Gesagte nur erweitert

$$(abc)^2 = a^2 \,.\, b^2 \,.\, c^2$$

$$(abcd)^n = a^n \,.\, b^n \,.\, c^n \,.\, d^n$$

§. 130.

δ) Durch Messen.

Soll das, was entsteht, wenn 12 durch 4 gemessen wird, die Grundzahl seyn, so ist die Reihe

$$\left(\frac{12}{4}\right)^1, \left(\frac{12}{4}\right)^2, \left(\frac{12}{4}\right)^3, \left(\frac{12}{4}\right)^4, \ldots$$

$$3^1 \qquad 3^2 \qquad 3^3 \qquad 3^4$$

$$3 \qquad 9 \qquad 27 \qquad 81$$

§. 131.

Messen wir zuletzt und vervielfachen zuerst, so sind die späteren Glieder folgende:

$$\left(\frac{12}{4}\right)^2 = \frac{12}{4} \times \frac{12}{4} = \frac{12.12}{4.4} = \frac{12^2}{4^2} = \frac{144}{16} = 9$$

$$\left(\frac{12}{4}\right)^3 = \frac{12}{4} \times \frac{12}{4} \times \frac{12}{4} = \frac{12.12.12}{4.4.4} = \frac{12^3}{4^3} = \frac{1728}{64} = 27$$

Die Glieder der vorgegebenen Reihe können wir also dadurch bilden, daß wir die entsprechenden Glieder der beiden einfachen Reihen

$$12^1, \quad 12^2, \quad 12^3, \quad 12^4, \ldots$$

$$4^1 \quad 4^2 \quad 4^3 \quad 4^4$$

mit einander messen.

§. 132.

Beide Wege, welche zu demselben Ziele führen, können wir durch folgende Zeichen angeben:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Je nachdem die Zahlen a und b beschaffen sind, oder je nachdem der Zweck der Untersuchung ist, kann der eine oder der andere Weg gewählt werden.

In den Fällen

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = (1,4)^2 = 1,96$$

$$\left(\frac{23}{8}\right)^2 = (2{,}875)^2 = 8{,}265625$$

mag es gleichgültig seyn, ob zuerst gemessen wird, und dann durch das Vervielfachen die zweiten Glieder gebildet werden, oder ob zuerst die zweiten Glieder der einfachen Reihen gebildet, und dann diese gemessen werden

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25} = 1{,}96$$

$$\left(\frac{23}{8}\right)^2 = \frac{23^2}{8^2} = \frac{529}{64} = 8{,}265625$$

aber nicht gleichgültig in folgendem Falle;

$$\left(\frac{165}{11}\right)^2 = (15)^2 = 225$$

$$\left(\frac{165}{11}\right)^2 = \frac{165^2}{11^2} = \frac{27225}{121} = 225$$

da der letztere Weg viel weitläufiger und mühvoller ist.

II. Verbindung der Glieder durch Zu- oder Abzählen, oder durch Vervielfachen oder Messen.

§. 133.

A. Durch Zuzählen.

Wenn Glieder derselben oder Glieder verschiedener Reihen zugezählt werden sollen, so haben wir im Allgemeinen die Glieder erst zu bilden, bevor wir sie zuzählen, z. B.

$$5^4 + 5^3 = 625 + 125 = 750$$

$$5^4 + 8^3 = 625 + 512 = 1137$$

§. 134.

In dem Falle aber, wenn mehrere auf einander folgende Glieder derselben Reihe zugezählt werden sollen, können wir dieses Geschäft durch andere Geschäfte ersetzen. Nennen wir nämlich die Summe der n ersten Glieder einer Reihe S

$$S = a^1 + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^n$$

nehmen jedes Glied, also auch die Summe aller Glieder, a mal

$$a \,.\, S = a\,(a^1 + a^2 + a^3 + \ldots\ldots a^n)$$

oder

$$a \,.\, S = a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots + a^{n+1}$$

und zählen von der letzteren die erste Reihe ab, so bleiben wenige Glieder übrig

$$a \cdot S - S = a^{n+1} - a^{1}$$

oder

$$(a - 1) S = a^{n+1} - a^{1}$$

und es erscheint, wenn wir durch $a - 1$ messen, die Summe der Reihe

$$S = \frac{a^{n+1} - a^{1}}{a - 1}$$

Das Zuzählen mehrerer aufeinander folgender Glieder derselben Reihe kann also durch Abzählen und Messen ersetzt werden.

§. 135.

Dieses kann auch geschehen nicht allein bei aufeinander folgenden sondern auch bei gleich weit von einander abstehenden Gliedern derselben Reihe. Es sey die Summe der letzteren S

$$S = a^{p} + a^{p+q} + a^{p+q} + \ldots + a^{p+(n-1)q}$$

Wird jedes Glied mit a^{q} vervielfacht

$$a^{q} \cdot S = a^{p+q} + a^{p+2q} + a^{p+3q} + \ldots + a^{p+nq}$$

und von dieser Reihe die erste abgezählt, so bleiben nur folgende Glieder übrig:

$$a^{q} \cdot S - S = a^{p+nq} - a^{p}$$

oder

$$(a^{q} - 1) \cdot S = a^{p+nq} - a^{p}$$

welche, wenn sie durch $a^{q} - 1$ gemessen werden, die Summe wieder erzeugen,

$$S = \frac{a^{p+nq} - a^{p}}{a^{q} - 1}$$

§. 136.

B. Durch Abzählen.

Sollen Glieder derselben oder verschiedener Reihen abgezählt werden, so müssen sie zuerst gebildet werden, z. B.

$$8^3 - 8^2 = 512 - 64 = 448$$

$$8^3 - 5^2 = 512 - 25 = 487$$

§. 137.

C. Durch Vervielfachen.

Wenn Glieder derselben Reihe vervielfacht werden, so vereinigen sie sich zu einem einzigen Gliede, z. B.

$$a^2 \times a^3 = aa \,.\, aaa = a^{2+3} = a^5$$

und allgemein

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Wenn aber Glieder verschiedener Reihen vervielfacht werden sollen, so müssen die Glieder zuvor gebildet werden, z. B.

$$4^3 \times 5^2 = 64 \times 25 = 1600$$

§. 138.

D. Durch Messen.

Was von dem Vervielfachen gesagt wurde, gilt auch von dem Messen, nämlich die Glieder derselben Reihe vereinigen sich zu einem einzigen, z. B.

$$\frac{7^5}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$$

oder

$$\frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2}$$

und

$$\frac{7^3}{7^5} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7^3}$$

oder

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$$

und allgemein

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Gehören aber die Glieder nicht derselben Reihe an, so müssen sie erst gebildet werden

$$\frac{8^3}{7^2} = \frac{512}{49} = 10\,\frac{22}{49}$$

III. Aus einem späteren Gliede die Grundzahl wieder aufsuchen.

A. Wenn die Grundzahl eine geschlossene Zahl ist.

α) Im Allgemeinen.

α_1) Aus dem zweiten das erste Glied.

---

§. 139.

Das erste Glied ist die Grundzahl oder die Wurzel der Reihe, aus welcher die übrigen Glieder durch Vervielfachen entspringen; das erste Glied in Hinsicht des zweiten Gliedes wird die zweite Wurzel, in Hinsicht des dritten Gliedes die dritte Wurzel, . . . genannt. Nach diesem ist in der Reihe

$$7^1 \quad , \quad 7^2 \quad , \quad 7^3 \quad , \quad 7^4 \quad , \ldots$$
$$7 \qquad 49 \qquad 343 \qquad 2401$$

7 die zweite Wurzel von 49
7 dritte 343
. . . .

Wird statt der Wurzel radix, und abgekürzt r gesetzt, so entsteht die Bezeichnung

$$7 = \overset{2}{r}\, 49$$

$$7 = \overset{3}{r}\, 343$$

. . . . .

oder, wenn der Strich am Buchstaben r verlängert wird,

$$7 = \sqrt[2]{49}$$

$$7 = \sqrt[3]{343}$$

. . . . . .

Diese Bezeichnung mag beibehalten, ihr aber kein höherer Werth beigelegt werden als derjenige, den jede Terminologie hat, die wegen der Bequemlichkeit eingeführt ist. Später wird die Bezeichnung folgen, welche die Idee, die der Reihe zu Grunde liegt, und nicht die Bequemlichkeit verlangt.

§. 140.

Wenn die Grundzahl nur aus einer Ziffer besteht, so reicht die kleine Tafel

1^2,	2^2,	3^2,	4^2,	5^2,	6^2,	7^2,	8^2,	9^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81

von 1 bis 9 hin, um für jedes zweite Glied die Grundzahl angeben, und sie ist klein genug, um sie dem Gedächtnisse anvertrauen zu können.

§. 141.

Besteht aber die Grundzahl aus zweien oder aus mehreren Ziffern, z. B. 67 oder 867, ... so kann sie, wenn die Einer von den übrigen Abtheilungen der Grundzahl getrennt werden, in zwei Theile zerfällt werden

$$10 . 6 + 7$$

$$10 . 86 + 7.$$

Das zweite Glied wird in diesem Falle aus dreien Producten zusammengesetzt

$$\begin{aligned}(67)^2 &= (10 \,.\, 6 + 7)^2 \\ &= 100 \,.\, 6^2 + 10 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 7 + 7^2 \\ &= 3600 + 840 + 49 \\ &= 4489 \\ (867)^2 &= (10 \,.\, 86 + 7)^2 \\ &= 100 \,.\, 86^2 + 10 \,.\, 2 \,.\, 86 \,.\, 7 + 7^2 \\ &= 739600 + 12040 + 49 \\ &= 751689\end{aligned}$$

Allgemein stellt a die Ziffer auf der ersten Stelle und b die übrigen Ziffern vor, so kann jede zwei- und mehrzifferige Zahl vorgestellt werden durch

$$10 \,.\, b + a$$

und das zweite Glied, welches durch das Vervielfachen

$$(10 \,.\, b + a)\,(10 \,.\, b + a)$$

gebildet wird, durch die drei Producte

$$100 \,.\, b^2 + 10 \,.\, 2 \,.\, b \,.\, a + a^2$$

§. 142.

Umgekehrt jede Zahl, welche das zweite Glied einer Reihe seyn, und zum ersten Gliede eine mehrzifferige Zahl haben will, muß aus diesen dreien Producten entstanden seyn, sich also auch wieder in diese drei Producte zerlegen lassen. Ist z. B. 4489 das zweite Glied, so wird sich sein Ursprung durch folgende Zeichen angeben lassen:

$$4489 = 100 \,.\, b^2 + 10 \,.\, 2 \,.\, b \,.\, a + a^2$$

Wollen wir nun diese Zahl wieder in die drei Producte, von welchen wir nichts als ihre Gestalt kennen, zerlegen, so werden folgende Betrachtungen zum Ziele führen.

Die Zahl, welche durch b vorgestellt ist, hat einen viel größeren Einfluß als die Ziffer a auf der ersten Stelle, und zwar einen solchen Einfluß, daß das erste Product $100 \cdot b^2$ der vorgegebenen Zahl 4489 sehr nahe kommt, daß mithin b^2 ohngefähr $\frac{4489}{100}$ oder ungefähr 44 ist. Es ist also in der oben angegebenen Tafel eine Zahl zu suchen, die mit sich selbst vervielfacht ohngefähr 44 erzeugt. Wir finden 6.

Nehmen wir nun an, daß

$$b = 6$$

so bleibt zur Bestimmung des a Hinreichendes übrig; denn führen wir diesen Werth in die obige Gleichung ein, so geht sie in folgende über

$$4489 = 100 \cdot 6^2 + 10 \cdot 2 \cdot 6 \cdot a + a^2$$
$$= 3600 + 10 \cdot 2 \cdot 6 \cdot a + a^2$$

Nehmen wir nun das erste Product weg,

$$889 = 10 \cdot 2 \cdot 6 \cdot a + a^2$$

so haben wir noch a so zu bestimmen, daß die beiden letzten Producte 889 betragen. Wir haben also für a die Zahlen 1, 2, . . ., 9 zu setzen, um zu erfahren, welche Zahl dieser Bedingung genügt. Wir können aber die vielen Versuche umgehen, wenn wir überlegen, daß auch bei dem höchsten Werthe von a nämlich 9 das letzte Product a^2 gegen $10 \cdot 2 \cdot 6 \cdot a$

nicht sehr in Betracht, und daß also das Produkt $10 . 2 . 6 . a$ der Zahl 889 sehr nahe kommt. Bei dieser Voraussetzung muß a ohngefähr $\frac{889}{10 . 2 . 6}$ oder $\frac{88}{2 . 6}$ also ohngefähr 7 seyn. Um aber zu erfahren, ob a wirklich 7 ist, haben wir $10 . 2 . 6 . 7$ oder 840 und dann $7 . 7$ oder 49 von 889 abzuzählen

$$\begin{array}{r} 889 \\ 840 \\ \hline 49 \\ 49 \\ \hline \end{array}$$

Da nun nichts übrig bleibt, so ist der wahre Werth

$$a = 7 .$$

Die Producte, worin die gegebene Zahl 4489 zerlegt werden kann, sind also

$$100 . 6^2 + 10 . 2 . 6 . 7 + 7^2$$

mithin ist die Grundzahl, aus welcher diese durch Vervielfachen entstanden sind,

$$10 . 6 + 7 \text{ oder } 67$$

§. 143.

Alle diese Geschäfte können auf einem kleineren Raume und mit größerer Bequemlichkeit ausgeführt werden, wenn die Zeichen b und a nicht niedergeschrieben und die Ziffern nicht früher herbeigeholt werden, bis sie nöthig sind. Die sämmtlichen Geschäfte können nach diesem auf folgende Weise zusammengedrängt werden:

```
4489  | 67
36    | 2 . 6 = 12
----
 88
 84
----
  49
  49
----
```

Wir lassen zwei Ziffern 89 unbeachtet, suchen die nächste Grundzahl von 44; wir finden 6, welche auf den zweiten Platz gesetzt wird. Wir zählen b^2 oder 6^2 oder 36 von 44, holen die nächste Ziffer 8 herunter, bilden einen Divisor, welcher 2 . b oder 2 . 6, das Doppelte der gefundenen Zahl ist, und theilen 88 durch 12; wir finden 7, welche auf den ersten Platz neben 6 kommt. Wir vervielfachen 12 mit 7, zählen 84 von 88 ab, holen die nächste Ziffer 9 herunter, und zählen zuletzt 7^2 oder 49 ab.

§. 144.

Bleibt zuletzt etwas übrig, so finden wir durch dieses Verfahren diejenige Zahl, welche durch sich selbst vervielfacht, eine der gegebenen nahe Zahl erzeugt; z. B.

```
7516  | 86
64    | 2 . 8 = 16
----
111
 96
----
156
 36
----
120
```

Die Zahl 86 mit sich vervielfacht erzeugt 7396, die nächst höhere Zahl 87 erzeugt 7569, welche größer als die vorgegebene ist.

§. 145.

Soll 751689 das zweite Glied der Reihe seyn, und die Grundzahl, welche aus dreien Ziffern besteht, gesucht werden, so zerlegen wir sie in die drei Producte

$$751689 = 100 \cdot b^2 + 10 \cdot 2 \cdot b \cdot a + a^2$$

Da b^2 ohngefähr 7516 ist, so ist nach der eben gezeigten Weise die nächste Grundzahl von 7516 zu suchen; und weil diese 86 ist, so ist

$$751689 = 100 \cdot 86^2 + 10 \cdot 2 \cdot 86 \cdot a + a^2$$
$$= 739600 + 10 \cdot 2 \cdot 86 \cdot a + a^2$$

und

$$12089 = 10 \cdot 2 \cdot 86 \cdot a + a^2$$

also a ohngefähr $\frac{1208}{2 \cdot 86}$ oder 7

Um sich von der Wahrheit zu versicheren, zählen wir von 12089 zuerst 10 . 2 . 86 . 7 oder 12040 und dann zuletzt 7^2 oder 49 ab

$$\begin{array}{r} 12089 \\ \underline{12040} \\ 49 \\ \underline{49} \end{array}$$

Das ganze Verfahren kann wie früher concentrirt werden

$$\begin{array}{r|l} 751689 & 86 \\ \underline{7396} & 2 \cdot 86 = 172 \\ 1208 & \\ \underline{1204} & \\ 49 & \\ 49 & \end{array}$$

§. 146.

Wir bemerken, daß wir diese Rechnungen an die vorigen im vorigen §. 144 anreihen, und sie als Fortsetzung der vorhergehenden betrachten können, nämlich

751689	867
64	2.8 = 16
111	2.86 = 172
96	
156	
36	
1208	
1204	
49	
49	

§. 147.

Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn die Grundzyl aus vier oder aus mehreren Ziffern besteht, z. B.

75238276	8674
64	2.8 = 16
112	2.86 = 172
96	2.867 = 1734
163	
36	
1278	
1204	
742	
49	
6937	
6936	
16	
16	

§. 148.

a_2) Aus dem dritten und einem späteren das erste Glied.

Das Verfahren, welches vom zweiten zum ersten Gliede geführt hat, führt auch vom dritten zum ersten wieder zurück. Vermittelst der kleinen Tabelle

1^3,	2^3,	3^3,	4^3,	5^3,	6^3,	7^3,	8^3,	9^3
1	8	27	64	125	216	343	512	729

kann die Grundzahl angegeben werden, wenn sie nur aus einer Ziffer besteht.

Wenn aber die Grundzahl aus zweien oder aus mehreren Ziffern besteht, so wird die Ziffer a auf der ersten Stelle von den übrigen, durch b vorgestellt, getrennt, wodurch das erste Glied die Gestalt

$$10 \cdot b + a$$

und das dritte Glied die Gestalt

$$1000 \cdot b^3 + 100 \cdot 3 \cdot b^2 \cdot a + 10 \cdot 3 \cdot b \cdot a^2 + a^3$$

erhält. Ist nun 474552 das dritte Glied, so ist es aus diesen dreien Producten entstanden, muß sich also auch wieder in dieselbe zerlegen lassen. Die Zeichen für diesen Gedanken sind:

$$474552 = 1000 \cdot b^3 + 100 \cdot 3 \cdot b^2 \cdot a + 10 \cdot 3 \cdot b \cdot a^2 + a^3$$

Wegen des überwiegenden Einflusses von b wird das erste Product der gegebenen Zahl oder b^3 der Zahl 474 sehr nahe kommen. Die obige Tabelle zeigt, daß b nicht größer als 7

seyn kann. Wird nun dieser Werth von b in die vorstehende Gleichung eingeführt, so geht sie in folgende über

$$474552 = 343000 + 100 \, . \, 3 \, . \, 7^2 \, . \, a + 10 \, . \, 3 \, . \, 7 \, . \, a^2 + a^3$$

oder, wenn das erste Product abgezählt wird, in folgende

$$131552 = 100 \, . \, 3 \, . \, 7^2 \, . \, a + 10 \, . \, 3 \, . \, 7 \, . \, a^2 + a^3$$

Um den ohngefähren Werth von a zu finden, wird 131552 durch $100 \, . \, 3 \, . \, 7^2$ oder 1315 durch $3 \, . \, 7^2$ oder durch 147 gemessen; es entsteht 9. Wird dieser Werth von a in die vorstehende Gleichung eingeführt, so zeigt sich bald, daß er den Bedingungen nicht genügt; wird aber $a = 8$ gesetzt, und werden von 131552 die drei Producte

$$100 \, . \, 3 \, . \, 7^2 \, . \, 8 + 10 \, . \, 3 \, . \, 7 \, . \, 8^2 + 8^3$$

oder

$$117600 + 13440 + 512$$

abgezählt, so bleibt nichts übrig. Die Grundzahl ist also

$$10 \, . \, b + a = 10 \, . \, 7 + 8 = 78$$

Diese Rechnungen können eben so concentrirt werden als die früheren, welche vom zweiten zum ersten Gliede führten.

§. 149.

Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn aus dem vierten oder aus einem späteren Gliede das erste wieder aufgesucht werden soll. Für die einzifferigen Zahlen 1, 2, . . . , 9 wird eine kleine Tabelle entworfen, und für die zwei und mehrzifferigen Grundzahlen die Form

$$10 \, . \, b + a$$

zu Grunde gelegt. Durch Vervielfachen werden die Producte gebildet, woraus das gegebene Glied bestehen wird, nämlich das vierte Glied aus den Producten

$$10000 . b^4 + 1000 . 4 . b^3 . a + 100 . 6 . b^2 . a^2 + 10 . 4 . b . a^3 + a^4$$

das fünfte aus

$$100000 . b^5 + 10000 . 5 . b^4 . a + 1000 . 10 . b^3 . a^2 + 100 . 10 . b^2 . a^3 + 10 . 5 . b . a^4 + a^5$$

u. s. w.

und uletzt wird die gegebene Zahl in die Producte zerlegt, deren Gestalt gefunden worden.

β) Besondere Fälle

β_1) aus einem Producte.

§. 150.

Wir haben früher gefunden, daß, wenn das erste Glied ein Product aus den beiden Factoren b und a oder a . b ist, auch das zweite und jedes folgende Glied als ein Product zweier entsprechender Glieder der einfacheren Reihen dargestellt werden kann, nämlich

$$(a . b)^2 = a^2 . b^2$$

$$(a . b)^3 = a^3 . b^3$$

. . . .

Umgekehrt soll ein Product das zweite Glied einer Reihe seyn, so können wir jeden Factor als zweites Glied einer Reihe betrachten, und das Product der ersten Glieder dieser Reihen

als das erste Glied der Reihe ansehen, deren zweites gegeben ist; oder in Zeichen

$$\sqrt[2]{(A \,.\, B)} = \sqrt[2]{A} \times \sqrt[2]{B}$$

und eben so auch bei den späteren Gliedern

$$\sqrt[3]{(A \,.\, B)} = \sqrt[3]{A} \times \sqrt[3]{B}$$

$$\sqrt[n]{(A \,.\, B)} = \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B}$$

Es ist also gleichgültig, ob zuerst vervielfacht, und dann die Wurzel ausgezogen, oder ob erst die Wurzel ausgezogen, und dann vervielfacht wird.

Es ist z. B.

$$\sqrt[2]{(49 \cdot 25)} = \sqrt[2]{49} \times \sqrt[2]{25}$$

Wird zuerst vervielfacht, so entsteht

$$\sqrt[2]{(49 \cdot 25)} = \sqrt[2]{1225} = 35$$

und wird zuerst die Wurzel ausgezogen

$$\sqrt[2]{49} \times \sqrt[2]{25} = 7 \times 5 = 35$$

§. 151.

β_2) aus einem Bruche.

Dasselbe, was so eben bei dem Vervielfachen funden worden, gilt auch bei dem Messen; denn nach dem Früheren ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

also auch umgekehrt

$$\sqrt[2]{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)} = \frac{\sqrt[2]{a^2}}{\sqrt[2]{b^2}}$$

oder

$$\sqrt[2]{\left(\frac{A}{B}\right)} = \frac{\sqrt[2]{A}}{\sqrt[2]{B}}$$

und so auch

$$\sqrt[3]{\left(\frac{A}{B}\right)} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{A}{B}\right)} = \frac{\sqrt[4]{A}}{\sqrt[4]{B}}$$

u. s. w.

Oder es ist gleichgültig, in welcher Ordnung das Messen und Wurzelausziehen vorgenommen wird.

Es ist z. B.

$$\sqrt[2]{\left(\frac{225}{25}\right)} = \frac{\sqrt[2]{225}}{\sqrt[2]{25}}$$

Wird zuerst gemessen, so entsteht

$$\sqrt[2]{\left(\frac{225}{25}\right)} = \sqrt[2]{9} = 3$$

nnd wird zuerst die Wurzel ausgezogen

$$\frac{\sqrt[2]{225}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

B. Wenn die Grundzahl keine geschlossene Zahl ist.

§. 152.

Nur die Zahlen

$$1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ 16\ ,\ 25\ ,\ 36\ ,\ \ldots\ .$$

scheinen als zweites Glied, die Zahlen

$$1\ ,\ 8\ ,\ 27\ ,\ 64\ ,\ 125\ ,\ \ldots\ .$$

als drittes Glied, u. s. w. auftreten zu können, und alle übrigen zwischenliegenden Zahlen ausgeschlossen zu seyn. Bemerken wir aber, daß, wenn z. B. die Zahl 7 mit einer unendlichen Zahl

$$10000000\ \ldots\ldots$$

vervielfacht, und mit derselben Zahl gemessen, und wen dieser unendliche Bruch

$$7 = \frac{700000000\ \ldots}{100000000\ \ldots}$$

als zweites Glied der Reihe angesehen wird, das erste Glied

$$\sqrt[2]{7} = \sqrt[2]{\frac{700000000\ \ldots}{100000000\ \ldots}} = \frac{\sqrt[2]{700000000\ \ldots}}{\sqrt[2]{100000000\ \ldots}}$$

$$= \frac{26457513\ \ldots\ldots}{10000000\ \ldots\ldots}$$

ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner aus unendlich vielen Ziffern besteht, und, in seine Bestandtheile aufgelöst, die unendliche Reihe erzeugt

$$2 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000} + \ldots$$

$$= 2{,}6457513\ \ldots\ldots$$

Diese unendliche Reihe ist das erste Glied der Reihe, worin 7 das zweite Glied ist. *)

Wenn diese unendliche Reihe mit sich selbst vervielfacht wird, so entsteht die Zahl 7, aber wenn nur einige Glieder dieser Reihe vereint mit sich selbst vervielfacht werden, so entsteht nur 6 und ein Bruch, der sich der 1 desto mehr nähert, desto mehr Glieder vereinigt werden, z. B.

$$\left(2+\frac{6}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}+\frac{5}{100000}\right)^2$$

oder

$$(2,64575)^2 = 6,9999750625$$

§. 153.

Dieses Vervielfachen der Zahl 7 mit der unendlichen Zahl 1000 . . . und dieses Wiederaufheben des Vervielfachens kann während des in §. 147 erklärten Geschäfts vorgenommen werden, wenn nämlich nach der nächsten Grundzahl von 7 ein Komma gemacht, und wenn statt eine Ziffer herunterzuholen, eine Null hinter den Rest gesetzt wird, nämlich

---

*) Anmerkung. Dieses Verfahren führt zu der ganzen Wahrheit, und nicht zu der verstümmelten Wahrheit, die hervorgebracht wird, wenn sehr kleine Theile nicht beachtet werden sollen.

7	2,6457 . . . .
4	2 . 2 = 4
30	2 . 26 = 52
24	2 . 264 = 528
60	2 . 2645 = 5290
36	
240	
208	
320	
16	
3040	
2640	
4000	
25	
39750	
37030	
27200	
49	
27151	
. . . .	

§. 154.

Durch dieses Verfahren ergeben sich folgende Grundzahlen

$$\sqrt[2]{2} = 1{,}4142136 \ldots$$

$$\sqrt[2]{3} = 1{,}7320508 \ldots$$

$$\sqrt[2]{5} = 2{,}2360680 \ldots$$

$$\sqrt[2]{6} = 2{,}4494897 \ldots$$

$$\sqrt[2]{7} = 2{,}6457513 \ldots$$

$$\sqrt[2]{10} = 3{,}1622777 \ldots$$

$$\sqrt[2]{11} = 3{,}3166248 \ldots$$

$$\sqrt[2]{13} = 3{,}4641016 \ldots$$

$$\sqrt[2]{14} = 3{,}7416574 \ldots$$

$$\sqrt[2]{15} = 3{,}8729833 \ldots$$

$$\sqrt[2]{17} = 4{,}1231056 \ldots$$

$$\sqrt[2]{19} = 4{,}3588989 \ldots$$

C. Das Zurückführen der Grundzahl einer bestimmten Zahl auf die Grundzahl einer niederen Zahl.

α) Durch Zerlegen in Factoren.

§. 155.

Es ist früher §. 150 gefunden, daß die Ordnung beim Vervielfachen und Wurzelausziehen gleichgültig ist. Diese Freiheit in der Anordnung der Geschäfte macht es möglich, daß das Wurzelausziehen aus einer Zahl auf das Wurzelausziehen aus einer anderen Zahl übertragen werden kann, und zwar bei vielen jener Zahlen, die in Factoren zerlegt werden können. Z. B. 108 läßt sich in 36 . 3 auflösen; es ist also

$$\sqrt[2]{108} = \sqrt[2]{36} \,.\, \sqrt[2]{3} = 6 \,.\, \sqrt[2]{3}$$

$$= 6 \times 1{,}7320508 = 10{,}3923048$$

Die Wurzel aus 108 ist also auf die Wurzel aus 3 zurückgeführt, und kann mit Hülfe der obigen Tafel mit großer Leichtigkeit und Sicherheit ausgeführt werden. Eben so ist

$$\sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{(4 \cdot 2)} = 2 \cdot \sqrt[2]{2}$$
$$\sqrt[2]{12} = \sqrt[2]{(4 \cdot 3)} = 2 \cdot \sqrt[2]{3}$$
$$\sqrt[2]{18} = \sqrt[2]{(9 \cdot 2)} = 3 \cdot \sqrt[2]{2}$$
$$\sqrt[2]{20} = \sqrt[2]{(4 \cdot 5)} = 2 \cdot \sqrt[2]{5}$$
$$\sqrt[2]{24} = \sqrt[2]{(4 \cdot 6)} = 2 \cdot \sqrt[2]{6}$$
$$\sqrt[2]{28} = \sqrt[2]{(4 \cdot 7)} = 2 \cdot \sqrt[2]{7}$$
$$\sqrt[2]{32} = \sqrt[2]{(16 \cdot 2)} = 4 \cdot \sqrt[2]{2}$$
$$\sqrt[2]{40} = \sqrt[2]{(4 \cdot 10)} = 2 \cdot \sqrt[2]{10}$$
$$\sqrt[2]{44} = \sqrt[2]{(4 \cdot 11)} = 2 \cdot \sqrt[2]{11}$$
$$\sqrt[2]{45} = \sqrt[2]{(9 \cdot 5)} = 3 \cdot \sqrt[2]{5}$$
$$\sqrt[2]{48} = \sqrt[2]{(16 \cdot 3)} = 4 \cdot \sqrt[2]{3}$$
$$\sqrt[2]{50} = \sqrt[2]{(25 \cdot 2)} = 5 \cdot \sqrt[2]{2}$$

. . . .

β) Durch Hinzufügen eines Factors.

§. 156.

Durch das Zerlegen in Factoren ist das Wurzelausziehen aus einer Zahl auf das Wurzelausziehen aus einer anderen Zahl zurückgeführt. Wir können auch durch Hinzufügen eines Factors dieses Zurückführen bewerkstelligen. Soll z. B. aus $\frac{11}{7}$ die zweite Wurzel gezogen werden, so können wir drei Wege einschlagen, nämlich

erstens, wir messen, und ziehen dann die Wurzel aus

$$\sqrt[2]{\left(\frac{11}{7}\right)} = \sqrt[2]{1{,}571428\ \ldots}$$

zweitens, wir ziehen erst die Wurzel aus, und messen zuletzt,

$$\sqrt[2]{\frac{11}{7}} = \frac{\sqrt[2]{11}}{\sqrt[2]{7}} = \frac{3{,}3166248\ \ldots}{2{,}6457513\ \ldots}$$

drittens, wir vervielfachen Zähler und Nenner mit 7, ziehen die Wurzel aus, und messen zuletzt,

$$\sqrt[2]{\frac{11}{7}} = \sqrt[2]{\frac{11 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt[2]{77}}{7} = \frac{8{,}7749644\ \ldots}{7}$$

$$= 1{,}2535663\ \ldots.$$

Wenn keine besondere Gründe für den zweiten Weg vorhanden, so wird entweder der erste oder der letzte gewählt. Nach diesem ist

$$\sqrt[2]{\frac{5}{3}} = \sqrt[2]{\frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[2]{15}}{3}$$

$$\sqrt[2]{\frac{3}{8}} = \sqrt[2]{\frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2}} = \frac{\sqrt[2]{6}}{4}$$

$$\sqrt[2]{\frac{7}{12}} = \sqrt[2]{\frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[2]{21}}{6}$$

$$\sqrt[2]{\frac{9}{11}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 11}}{11} = \frac{3 \cdot \sqrt[2]{11}}{11}$$

D. Allgemeine Untersuchung über die Bildung der Haupt- und Zwischenglieder.

§. 157.

Jede Zahl kann als erstes Glied einer Reihe auftreten, es kann also auch die Zahl, welche ein späteres Glied einer gegebenen Reihe ist, als Grundzahl einer neuen Reihe gewählt werden. Ist z. B. 3 das erste Glied der Reihe A

$$\begin{matrix} 3^0, & 3^1, & 3^2, & 3^3, & 3^4, & 3^5, & 3^6, & 3^7, & 3^8, \ldots \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 & 2187 & 6561 \end{matrix}$$

und wird 9, welches das zweite Glied dieser Reihe ist, zum ersten Gliede einer neuen Reihe B

$$\begin{matrix} (3^2)^0, & (3^2)^1, & (3^2)^2, & (3^2)^3, & (3^2)^4, & (3^2)^5, \ldots \\ 9^0 & 9^1 & 9^2 & 9^3 & 9^4 & 9^5 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 6561 & 59049 \end{matrix}$$

gemacht, so wird das vierte zum zweiten Gliede der neuen Reihe

sechste	dritten
achte	vierten
. . .	. . . .
2 . n	n

oder wird das dritte Glied der gegebenen Reihe zum ersten Gliede einer neuen Reihe gemacht, so entsteht die Reihe C

$$\begin{matrix} (3^3)^0, & (3^3)^1, & (3^3)^2, & (3^3)^3, & (3^3)^4, \ldots \\ 27^0 & 27^1 & 27^2 & 27^3 & 27^4 \\ 1 & 27 & 729 & 19683 & 531441 \end{matrix}$$

worin das sechste Glied zum zweiten Gliede
neunte dritten
3 n n

geworden.

Allgemein ist a das erste Glied

$$a^0 \,,\quad a^1 \,,\quad a^2 \,,\quad a^3 \,,\; \ldots$$

und wird das n^{te} Glied zum ersten Gliede einer neuen Reihe gemacht

$$(a^n)^0 \,,\quad (a^n)^1 \,,\quad (a^n)^2 \,,\quad (a^n)^3 \,,\; \ldots$$

so besteht das m^{te} Glied dieser neuen Reihe aus m Factoren, wovon jeder Factor ein Product von n Factoren ist, mithin das m^{te} Glied dieser Reihe aus $n \cdot m$ Factoren, wovon jeder a ist, das m^{te} Glied dieser neuen Reihe ist mithin das $n \cdot m^{te}$ Glied der gegebenen Reihe, oder in Zeichen

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Machen wir das m^{te} Glied der gegebenen Reihe zum ersten Gliede einer neuen Reihe

$$(a^m)^0 \,,\quad (a^m)^1 \,,\quad (a^m)^2 \,,\; \ldots$$

so enthält das n^{te} Glied dieser Reihe eben so viele Factoren als das m^{te} Glied jener Reihe, und es ist

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$$

§. 158.

Die Zahlen 3, 27, 243, 2187, ..., welche Glieder der Reihe A sind, kommen in der Reihe B nicht vor. Sollen sie aber als Glieder in der Reihe B erscheinen, so müssen wir sie als Zwischenglieder aufnehmen, und sie in dieser Reihe unter folgenden Zeichen aufführen:

9^0,	$9^{\frac{1}{2}}$,	9^1,	$9^{\frac{3}{2}}$,	9^2,	$9^{\frac{5}{2}}$,	9^3,	$9^{\frac{7}{2}}$,	9^4,	...
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	

Denn nach der eingeführten Bezeichnung ist die Stellenzahl des zweiten Gliedes das Doppelte der Stellenzahl des ersten Gliedes, ist also 1 die Stellenzahl des zweiten Gliedes, so ist $\frac{1}{2}$ die Stellenzahl des ersten Gliedes und $3 \cdot \frac{1}{2}$, $5 \cdot \frac{1}{2}$, $7 \cdot \frac{1}{2}$, ... oder $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, ... die Stellenzahl des dritten, fünften, siebenten ... Gliedes.

§. 159.

Eben so kommen die Zahlen, 3, 9, 81, 243, 2187, 6561, ..., welche Glieder der Reihe A sind, nicht in der Reihe C vor. Sollen sie aber in dieser Reihe aufgenommen werden, so können sie nur als Zwischenglieder erscheinen, und müssen sich folgender Bezeichnung unterziehen:

27^0,	$27^{\frac{1}{3}}$,	$27^{\frac{2}{3}}$,	27^1,	$27^{\frac{4}{3}}$,	$27^{\frac{5}{3}}$,	27,	...
1	3	9	27	81	243	729	

Denn die Stellenzahl des dritten Gliedes ist das Dreifache der Stellenzahl des ersten Gliedes; soll also 1 die Stellenzahl

des dritten Gliedes seyn, so ist $\frac{1}{3}$ die Stellenzahl des ersten Gliedes, mithin $2 \cdot \frac{1}{3}$, $4 \cdot \frac{1}{3}$, $5 \cdot \frac{1}{3}$, ... oder $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, ... die Stellenzahl des zweiten, vierten, fünften, ... Gliedes.

Nach diesem bedeutet $27^{\frac{1}{3}}$ das erste Glied der Reihe, in welcher 27 das dritte Glied ist, oder bedeutet, aus dem dritten Gliede das erste Glied aufsuchen, oder bedeutet, 27 in drei gleiche Factoren zerlegen.

Was wir also durch den ersten Buchstaben des Worts radix oder auch $\sqrt[3]{27}$ vorstellten, muß durch $27^{\frac{1}{3}}$ vorgestellt werden.

Ferner bedeutet $27^{\frac{2}{3}}$ das zweite Glied der Reihe, in welcher 27 das dritte Glied ist, oder bedeutet: aus dem dritten Gliede das zweite bilden, oder bedeutet: zwei von den dreien gleichen Factoren, in welche 27 zerlegt werden kann, oder in Zeichen

$$27^{\frac{2}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^2$$

Dasselbe kann von $27^{\frac{4}{3}}$, $27^{\frac{5}{3}}$, ... gesagt werden. Wir können die obige Reihe also auch so vorstellen:

$$(27^{\frac{1}{3}})^0, \quad (27^{\frac{1}{3}})^1, \quad (27^{\frac{1}{3}})^2, \quad (27^{\frac{1}{3}})^3, \quad (27^{\frac{1}{3}})^4, \ldots$$

1	3	9	27	81

§. 160.

Ueberhaupt ist b das m^te Glied einer Reihe, oder ist b

ein Product von m gleichen Factoren, so kann das erste Glied oder jeder Factor dieses Products vorgestellt werden durch

$$b^{\frac{1}{m}}$$

und das n^{te} Glied dieser Reihe oder n Factoren durch

$$b^{\frac{n}{m}} \text{ oder } \left(b^{\frac{1}{m}}\right)^n$$

Das erstere kann auch als Zeichen der Aufgabe: aus dem m^{ten} das n^{te} Glied herstellen und letzteres als die Auflösung dieser Aufgabe angesehen werden; nämlich man suche aus dem m^{ten} Gliede das erste Glied, und bilde durch das Vervielfachen das n^{te} Glied, oder man zerlege zuerst b in m Factoren, und vervielfache wieder nmal. Dasselbe kann auch durch folgende Zeichen angegeben werden

$$(\sqrt[m]{b})^n$$

§. 161.

Wir sind an diese Ordnung nicht gebunden, wir können auch erst vervielfachen und dann Zerlegen. Ist z. B. b das dritte Glied der Reihe, und es soll das zweite Glied gebildet werden, so geben folgende Zeichen die Aufgabe und ihre Auflösungen

$$b^{\frac{2}{3}} = \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1 \,.\, b^{\frac{1}{3}} \,.\, b^{\frac{1}{3}}$$

Die drei Factoren, worin b zerlegt wird, sind:

$$b = b^{\frac{1}{3}} \,.\, b^{\frac{1}{3}} \,.\, b^{\frac{1}{3}}$$

und wird b mit b vervielfacht, so entsteht ein Product von sechs Factoren

$$b^2 = b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$$

Zerlegen wir nun dieses Product in drei Factoren, so können wir dieses angeben durch

$$(b^2)^{\frac{1}{3}} \text{ oder } \sqrt[3]{(b^2)}$$

und erhalten von den sechs Factoren nur zwei Factoren

$$b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$$

welche wir auch früher erhielten. Es ist folglich

$$b^{\frac{2}{3}} = (b^{\frac{1}{3}})^2 = (b^2)^{\frac{1}{3}}$$

Nichts von diesen Gründen wird geändert, wenn wir Buchstaben wählen. Besteht nämlich b aus m Factoren, wovon jeder durch

$$b^{\frac{1}{m}}$$

vorgestellt wird, so besteht das Product

$$b^n$$

aus n mal m oder n . m solcher Factoren. Wird nun dieses Product in m Factoren zerlegt, so wird dieses angekündigt durch

$$(b^n)^{\frac{1}{m}}$$

Wenn aber jene n . m Factoren in m Abtheilungen gebracht werden, so kommen in jede Abtheilung n Factoren, die sämmtlich vorgestellt werden durch

$$\left(b^{\frac{1}{m}}\right)^n .$$

Hieraus folgt, daß

$$(b^n)^{\frac{1}{m}} = \left(b^{\frac{1}{m}}\right)^n = b^{\frac{n}{m}}$$

Es ist also gleichgültig, ob zuerst vervielfacht, und dann zerlegt, oder erst zerlegt und dann vervielfacht wird.

Dasselbe geben folgende Zeichen an:

$$\sqrt[m]{(b^n)} = (\sqrt[m]{b})^n$$

§. 162.

Es ist ferner gleichgültig, ob b zuerst in m Factoren, und dann jeder m^{te} Factor wieder in q Factoren, oder ob b zuerst in q Factoren und dann jeder Factor in m Factoren zerlegt wird; denn in jedem Falle wird b in m . q Factoren zerlegt. Diese verschiedene Zerlegungsweisen geben folgende Zeichen an:

$$\left(b^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{m \cdot q}}$$

oder

$$\sqrt[q]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[m.q]{b}$$

Nach diesem ist z. B.

$$\sqrt[4]{\ } = \sqrt[2]{\ }\sqrt[2]{\ }$$

$$\sqrt[8]{\ } = \sqrt[2]{\ }\sqrt[2]{\ }\sqrt[2]{\ }$$

§. 163.

Durch diese Untersuchung haben wir folgende Wahrheiten gefunden: Es findet Freiheit statt

I. bei dem Vervielfachen

$$(b^n)^p = (b^p)^n = b^{n \cdot p}$$

II. bei dem Zerlegen

$$\left(b^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{m \cdot q}}$$

III. bei dem Vervielfachen und Zerlegen

$$\left(b^{\frac{1}{m}}\right)^{n} = \left(b^{n}\right)^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{n}{m}}$$

Wir können sie alle vereinigen. Es sey z. B. folgende Ordnung der Geschäfte vorgeschrieben:

$$\left(b^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}} \text{ oder } \left(\left(\left(b^{\frac{1}{m}}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{p}$$

Wir zerlegen zuerst und Vervielfachen zuletzt

$$\left(\left(\left(b^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{n}\right)^{p}$$

und statt nach einander zu zerlegen und nach einander zu vervielfachen, zerlegen wir gleich b in m . q Factoren, und nehmen gleich n . p Factoren

$$\left(b^{\frac{1}{m \cdot q}}\right)^{n \cdot p} \quad \text{oder} \quad b^{\frac{n \cdot p}{m \cdot q}}$$

Es ist folglich

$$\left(b^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{n}{m} \times \frac{p}{q}}$$

§. 164.

Bei allen diesen Geschäften können m, n, p, q bejahete oder verneinte Zahlen seyn, denn im letzteren Falle hat man nur $\frac{1}{b}$ statt b zu setzen.

§. 165.

Hingegen ist es bei obigen Wahrheiten nicht gleichgültig, ob b das Zeichen + oder das Zeichen — vor sich trägt; denn diese Zeichen geben ein Geschäft an, welches nicht unter den genannten vorkommt. Die obigen Wahrheiten erstrecken sich nur auf Zahlen an und für sich, von denen nicht gesagt ist, ob sie zu- oder abgezählt werden sollen.

Wir bemerken, daß, sowohl bei einer bejaheten als verneinten Grundzahl das zweite Glied immer bejahet ist. Z. B.

$$(+3)^2 = +9 \quad \text{und} \quad (-3)^2 = +9$$

Hieraus folgt, daß zum zweiten Gliede immer zwei Grundzahlen gehören, nämlich

$$(+9)^{\frac{1}{2}} = \pm 3$$

Ferner folgt hieraus, daß eine verneinte Zahl niemals das zweite Glied der Reihe seyn kann, und daß also auch

$$\sqrt[2]{(-A)} \quad \text{oder} \quad (-A)^{\frac{1}{2}}$$

eine unmögliche Größe ist.

So lange $(-A)^{\frac{1}{2}}$ allein vorkommt, ist das Unmögliche vorhanden, aber in Verbindung durch Vervielfachen, und

zwar in einer geraden Zahl, wird wieder das Mögliche hergestellt, nämlich

$$(-A)^{\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}} = \left((-A)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (-A)^{\frac{2}{2}} = -A$$

$$(-A)^{\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}} = \left((-A)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (-A)^{1+\frac{1}{2}}$$

$$= -A \,.\, (-A)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left((-A)^{\frac{1}{2}}\right)^4 = (-A)^{\frac{4}{2}} = (-A)^2 = +A$$

u. s. w.

IV. Aus der Verbindung mehrerer Glieder das erste Glied wieder aufsuchen.

---

§. 166.

Nach der einfachen Aufgabe

aus einem einzeln späteren Gliede das erste Glied aufsuchen

folgt die zusammengesetztere Aufgabe

aus der Verbindung mehrerer Glieder das erste Glied wieder herstellen

Diese Verbindungen können seyn,

der beiden ersten Glieder:

$$x^2 + 6x^1 = 55$$

der drei ersten Glieder

$$x^2 + 6x^2 + 11x^1 = 365$$

der vier ersten Glieder

$$x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 9x = 1786$$

u. s. w.

Wir nennen diese Verbindungen Gleichungen vom zweiten, dritten, vierten, . . . und höheren Graden. Unser Zweck ist nur, die erste Verbindung zu untersuchen.

§. 167.

Bei dieser Verbindung gehen wir von der Bemerkung aus, daß, wenn das erste Glied der Reihe aus zweien Theilen

$$x + a$$

besteht, das zweite Glied aus den dreien Producten

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

zusammengesetzt werden kann, worin außer dem ersten Gliede x^1 auch noch das zweite Glied x^2 vorkommt.

Diesen bestimmten Fall, wo das erste und zweite Glied in derjenigen Verbindung erscheinen, die uns jetzt beschäftigt, wollen wir festhalten. Wir bemerken hierbei, daß, wo diese drei Producte zugleich sind, das zweite Glied der Reihe gesetzt werden kann, in welcher $x + a$ das erste Glied ist. Wenn aber nur die beiden ersten Producte

$$x^2 + 2ax$$

vorkommen, so muß das dritte fehlende Product a^2 ergänzt werden.

Liegt daher die Verbindung

$$x^2 + 6x = 55$$

der beiden ersten Glieder x^1 und x^2 vor, so können

$$x^2 + 6x^1$$

als die beiden Producte

$$x^2 + 2ax$$

angesehen werden, zu welchen das dritte Product a^2 fehlt,

welches mit Leichtigkeit herzustellen ist, denn, da $2a = 6$, so ist $a = \frac{6}{2} = 3$.

Setzen wir nun das fehlende Product 3^2 oder 9 zu der obigen Verbindung, so erhalten wir die drei Producte

$$x^2 + 6x + 3^2 = 55 + 9$$

welche vereint das zweite Glied der Reihe bilden, in welcher $x + 3$ das erste Glied ist, oder in Zeichen

$$(x + 3)^2 = 64$$

Die zusammengesetzte Aufgabe haben wir hiedurch auf die einfache Aufgabe zurückgebracht, nämlich aus einem einzelnen Gliede das erste Glied wieder herstellen.

Das erste Glied dieser neuen Reihe kann seyn

$$x + 3 = + 8$$

oder

$$x + 3 = - 8$$

mithin das erste Glied der gegebenen Reihe entweder

$$x = + 8 - 3 = + 5$$

oder

$$x = - 8 - 3 = - 11$$

§. 168.

Der Verbindung der beiden ersten Glieder wird gewöhnlich folgende Gestalt gegeben

$$x^2 + Ax + B = 0$$

Wir stellen die vorige Gestalt wieder her

$$x^2 + A x = - B$$

und verfahren auf die vorhin gezeigte Weise. Wir ergänzen nämlich das fehlende Product

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 \text{ oder } \frac{A^2}{4}$$

setzen statt der drei Producte

$$x^2 + A x + \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} - B$$

das zweite Glied der Reihe

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} - B$$

in welcher

$$x + \frac{A}{2} = \pm \left(\frac{A^2}{4} - B\right)^{\frac{1}{2}}$$

das erste ist, und trennen zuletzt $\frac{A}{2}$ von x

$$x = - \frac{A}{2} \pm \left(\frac{A^2}{4} - B\right)^{\frac{1}{2}}$$

Das erste Glied der Reihe kann also seyn

$$x = - \frac{A}{2} + \left(\frac{A^2}{4} - B\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$x = - \frac{A}{2} - \left(\frac{A^2}{4} - B\right)^{\frac{1}{2}}$$

§. 169.

In dem Falle, wenn B größer als $\frac{A^2}{4}$ ist, entstehen unmögliche Größen, welche anzeigen, daß den Bedingungen der Aufgabe nicht Genüge geleistet werden kann.

V. Jeder Zahl ihre Stelle in der Reihe anweisen.

§. 170.

Wird eine bestimmte Grundzahl angenommen, z. B. 10, so ist die Reihe

10^0,	10^1,	10^2,	10^3,	. . .
1	10	100	1000	

in welcher nur die vorstehenden Zahlen Glieder der Reihe sind, und zwar

1	ist das 0te Glied,	oder die Stellenzahl von	1	ist 0
10	1te		10	1
100	2te		100	2
1000	3te		1000	3

oder in einer anderen Terminologie

der Logarithme von 1	ist 0	oder	lg: 1 = 0
10	1		lg: 10 = 1
100	2		lg: 100 = 2
1000	3		lg: 1000 = 3
. . . .			. . . . . .

§. 171.

Da die genannten Zahlen schon die Hauptplätze einnehmen, so können den übrigen Zahlen

2	3	. . . . .	9
11	12	. . . . .	99
101	102	. . . . .	999
. . . .			

nur Zwischenplätze angewiesen werden.

Nehmen wir zwischen je zweien Hauptgliedern sieben Glieder an, so wird 10^1 das achte Glied, und die Reihe ist

$$10^0, 10^{\frac{1}{8}}, 10^{\frac{2}{8}}, \ldots, 10^{\frac{7}{8}}, 10^1, 10^{1\frac{1}{8}}, \ldots, 10^{1\frac{7}{8}}, 10^2, \ldots$$

Da nun

$$10^{\frac{1}{2}} = 3,1622777\ldots$$

$$10^{\frac{1}{4}} = (3,1622777)^{\frac{1}{2}} = 1,778279\ldots$$

$$10^{\frac{1}{8}} = (1,778279)^{\frac{1}{2}} = 1,3335\ldots$$

so ist

$$10^{\frac{3}{8}} = 10^{\frac{2}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} = 1,778279 \times 1,3335 = 2,371\ldots$$

$$10^{\frac{5}{8}} = 10^{\frac{4}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} = 3,1622777 \times 1,3335 = 4,21689\ldots$$

$$10^{\frac{6}{8}} = 10^{\frac{5}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} = 4,21689\ldots \times 1,3335 = 5,6232\ldots$$

$$10^{\frac{7}{8}} = 10^{\frac{6}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} = 5,6232\ldots \times 1,3335\ldots = 7,4985\ldots$$

Die Reihe mit ihren Zwischengliedern ist also

10^0	$10^{\frac{1}{8}}$	$10^{\frac{2}{8}}$	$10^{\frac{3}{8}}$	$10^{\frac{4}{8}}$	$10^{\frac{5}{8}}$	$10^{\frac{6}{8}}$	$10^{\frac{7}{8}}$	10^1
1	1,33	1,77	2,37	3,16	4,21	5,62	7,49	10

$10^{1\frac{1}{8}}$	$10^{1\frac{2}{8}}$	$10^{1\frac{3}{8}}$	. . .	10^2	$10^{2\frac{1}{8}}$	. . . . .
13,3	17,7	23,7		100	133,3	

Wir sind hiedurch in den Stand gesetzt, mehreren Zahlen ihre Plätze anzuweisen, es ist nämlich

$\frac{1}{8}$ die Stellenzahl von 1,33

$\frac{2}{8}$ 1,77

$\frac{3}{8}$ 2,37

oder

$$\lg 1{,}33 = \frac{1}{8} \text{ oder } = 0{,}125$$

$$\lg 1{,}77 = \frac{2}{8} \quad = 0{,}25$$

$$\lg 2{,}37 = \frac{4}{8} \quad = 0{,}5$$

§. 172.

Nehmen wir in jedem Zwischenraume 31 Glieder an, so ist die Reihe

$$10^0,\ 10^{\frac{1}{32}},\ 10^{\frac{2}{32}},\ \ldots,\ 10^{\frac{31}{32}},\ 10^1,\ 10^{1\frac{1}{32}},$$

Berechnen wir diese Glieder, wie vorhin gezeigt ist, so können wir mehreren Zahlen ihre Plätze in der Reihe anweisen.

Nichts hindert, noch mehrere Zwischenglieder anzunehmen, und hierin so weit zu gehen, als man will. Werden die Glieder der Reihe mit ihren zugehörigen Stellenzahlen in eine Tabelle gebracht, so entstehen die logarithmischen Tafeln.

§. 173.

Bei der Anwendung dieser Tafeln sind die früher gefundenen Wahrheiten

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

oder da $a = 10$ ist, die Wahrheiten

$$10^{n} \cdot 10^{m} = a^{n+m}$$

$$(10^{p})^{q} = 10^{p \cdot q}$$

wo n, m, p, q ganze oder gebrochene, bejahete oder verneinte Zahlen seyn können, zu berücksichtigen.

§. 174.

Sollen nun zwei Zahlen A und B miteinander vervielfacht werden, so sucht man in den Tafeln ihre Stellenzahlen n und m

$$A = 10^{n} \quad , \quad B = 10^{m}$$

Die Summe dieser Stellenzahlen $n + m$ ist die Stellenzahl des Products, zu welcher also in den Tafeln das zugehörige Glied zu suchen ist. Dieses Glied oder diese Zahl ist das verlangte Product.

Dieses Verfahren wird durch folgende Zeichen angegeben

$$\lg : (A \cdot B) = \lg : A + \lg : B$$

Soll z. B. das Product 78×696 gebildet werden, so ist

$$\begin{array}{rl} \lg : 78 & = 1{,}8920946 \\ \lg : 696 & = \underline{2{,}8426092} \\ & \ 4{,}7347038 = \lg : 54288 \end{array}$$

oder

$$10^{1{,}8920946} \times 10^{2{,}8426092} = 10^{4{,}7347038}$$

oder

$$78 \qquad \times 696 \qquad = 54288$$

§. 175.

Sollen zwei Zahlen A und B mit einander gemessen werden, so ist der Unterschied ihrer Stellenzahlen die Stellenzahl derjenigen Zahl, welche durch das Messen entsteht, oder in Zeichen

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$$

oder

$$\lg\left(\frac{A}{B}\right) = \lg A - \lg B$$

Ist z. B.

$$\frac{A}{B} = \frac{982218}{3867}$$

so ist

$$\lg : 982218 = 5{,}9922080$$
$$\lg : 3867 \quad = 3{,}5873742$$
$$2{,}4048338 = \lg : 254$$

oder

$$\frac{10^{5,9922080}}{10^{3,5873742}} = 10^{2,4048338}$$

oder

$$\frac{982218}{3867} = 254$$

§. 176.

Wenn A^q zu berechnen ist, so wird in den Tafeln die Stellenzahl von A gesucht

$$A = 10^p$$

Da nun

$$A^q = (10^p)^q = 10^{p \cdot q}$$

so ist das Product p . q die Stellenzahl derjenigen Zahl, welche verlangt wird. Die Zeichen für dieses Verfahren sind folgende

$$\lg : (A^q) = q \times \lg : A$$

Ist z. B. 87^3 zu bilden, so ist

$$\lg : 87 = 1,9395193$$
$$\lg : (87)^3 = 3 \times 1,9395193$$
$$= 5,8185579 = \lg : 658503$$

oder

$$(10^{1,9395193})^3 = 10^{3 \times 1,9395193} = 10^{5,8185579}$$

oder

$$87^3 = 658503$$

§. 177.

Es sey $(438976)^{\frac{1}{3}}$ zu berechnen.

Es ist

$$\lg\ 438976 = 5,6424407$$
$$\lg\ (438976)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times 5,6424407$$
$$= 1,8808136 = \lg\ 76$$

oder

$$438976^{\frac{1}{3}} = (10^{5,6424407})^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3} \times 5,6424407}$$
$$= 10^{1,8808136} = 76$$

§. 178.

Es sey $67^{\frac{3}{5}}$ zu berechnen.

Es ist

$$\lg : 67 = 1,8260748$$
$$\lg : 67^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \times 1,8260748$$
$$= 1,0956449 = \lg\ 12,4636$$

oder

$$67^{\frac{3}{5}} = (10^{1,8260748})^{\frac{3}{5}} = 10^{\frac{3}{5} \times 1,8260748}$$
$$= 10^{1,0956449} = 12,4636$$

Aus diesen wenigen Fällen wird der große Nutzen erkannt werden, den gute logarithmische Tafeln gewähren.

IOTHECA
NSIS

Druckfehler.

Seite	66	Zeile	3	von oben	lese	erste	statt ersten
"	119	"	8	" "	l.	34	st. 33
"	159	"	14	" "	l.	$a^{p+q} + a^{p+2q}$	st. $a^{p+q} + a^{p+q}$
"	185	"	16	" "	l.	zerlegen	st. Zerlegen.

grom

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schweins, Franz Ferdinand

Größenlehre systematisch bearbeitet

Leipzig 1833

Math.p. 522 ga
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082810-5